$12^{\text{è}}$ cours
4/5/21

Chapitre 5

Equations différentielles linéaires (3/3)

Calcul Intégral
MDD151
L1 DD
iMIEM/MSV

II Eq. Diff. linéaires d'ordre 2.

2) Eq. homogènes à coeff. constants.

$$y''(t) + a y'(t) + b y(t) = 0 \quad (H)$$ a, b réels fixés

Equation caractéristique : $r^2 + ar + b = 0$.

Discriminant : $\Delta = a^2 - 4b$.

Th : (i) Si $\Delta > 0$ les solutions de (H) sont les fonctions de la forme

$$y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

où r_1, r_2 sont les 2 solutions de $r^2 + ar + b = 0$.

(ii) <u>Si $\Delta = 0$</u> : $y(t) = \lambda e^{r_0 t} + \mu t e^{r_0 t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

où r_0 est la racine double de $r^2 + ar + b = 0$.

(iii) <u>Si $\Delta < 0$</u> : $y(t) = e^{-\frac{a}{2}t}\left(\lambda \cos\left(\frac{\delta}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\delta}{2}t\right)\right)$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

où $\delta = \sqrt{-\Delta} = \sqrt{|\Delta|}$.

On a vu au dernier cours :

- Lien entre (iii) et (i) via exponentielle complexe.
- le fait que toute fonction de la forme annoncée est bien solution de (H) (laissé en exercice pour (iii)).

<u>Montrons</u> que toutes les solutions de (H) sont

bien de la forme annoncée.

Soit y une solution : $y''(t) + a y'(t) + b y(t) = 0$.

(i) Cas $\Delta > 0$: r_1 et r_2 sont les racines du polynôme $X^2 + aX + b$ donc :

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = -a \\ r_1 r_2 = b \end{cases}$$

(Preuve : $X^2 + aX + b = (X - r_1)(X - r_2) = X^2 - (r_1 + r_2)X + r_1 r_2$)

Donc $y''(t) - (r_1 + r_2) y'(t) + r_1 r_2 \, y(t) = 0$.

$$(y' - r_1 y)' - r_2 (y' - r_1 y) = 0.$$

Posons $z = y' - r_1 y$. Alors $z'(t) - r_2 z(t) = 0$.

z est solution d'une éq diff linéaire homogène d'ordre 1 à coeff. constant :

$$\exists \mu_1 \in \mathbb{R} \ \forall t \in I \quad z(t) = \mu_1 e^{r_2 t}.$$

Donc

$$y'(t) - r_1 y(t) = \mu_1 e^{r_2 t}$$

y est solution d'une éq diff linéaire d'ordre 1 avec second membre.

Solution particulière :

$$\frac{\mu_1}{r_2 - r_1} e^{r_2 t}.$$

Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall t \in I$ $\quad y(t) = \underbrace{\frac{\mu_1}{r_2 - r_1}}_{\text{on le note } \mu} e^{r_2 t} + \lambda e^{r_1 t}$

Conclusion : on a trouvé $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que
$\forall t \in I \quad y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$.

Donc y est bien de la forme voulue.

(ii) r_0 racine double de $X^2 + aX + b$ donc

$$2r_0 = -a \quad \text{et} \quad r_0^2 = b.$$

Donc
$$y'' + ay' + by = 0$$
$$y'' - 2r_0 y' + r_0^2 y = 0$$

$$(y'-r_0y)'-r_0(y'-r_0y)=0.$$

Posons $z=y'-r_0y$. Alors $z'-r_0z=0$

donc $\exists\mu\in\mathbb{R}$ $\forall t\in\mathbb{R}$ $z(t)=\mu e^{r_0t}$.

D'où $y'(t)-r_0y(t)=\mu e^{r_0t}$.

Solution particulière : elle n'est plus de la même forme que pour (i). Cette fois on prend

$$\mu t e^{r_0t}$$

En effet sa dérivée est $\mu e^{r_0t}+\mu t r_0 e^{r_0t}$; elle est bien solution de $y'(t)-r_0y(t)=\mu e^{r_0t}$.

Donc la solution y s'écrit sous la forme :

$$\mu t e^{r_0 t} + \lambda e^{r_0 t} \quad \text{pour un certain } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cela termine la preuve.

(iii) Admis.

<u>Exemples d'application du Th</u> :

① $y'' - 3y' + 2y = 0$

Eq carac. : $r^2 - 3r + 2 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 = 9 - 8 = 1 > 0$. cas (i)

Racines : $\dfrac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$ donc racines : $\underline{2 \text{ et } 1}$.

Solutions : $y(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

② $y'' + 2y' + 2y = 0$

$r^2 + 2r + 2 = 0$

$\Delta = 4 - 4 \times 2 = -4 < 0$ cas (iii)

$\delta = \sqrt{|\Delta|} = \sqrt{4} = 2$.

coefficient de t : $\frac{\delta}{2} = 1$

Solutions : $y(t) = e^{-t}\left(\lambda \cos(t) + \mu \sin(t)\right)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

③ $y'' - 2y' + y = 0$

$r^2 - 2r + 1 = 0$

$(r-1)^2$ $\Delta = 0$, 1 est racine double

Solutions : $y(t) = (\lambda + \mu t)e^{t}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3) Equations avec second membre à coefficients constants.

(E) $y''(t) + a y'(t) + b y(t) = \underbrace{c(t)}_{\text{second membre}}$, $t \in I$

avec c continue sur I et a, b réels fixés.

<u>Th</u> : les solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme $y_g + y_p$

où y_g est une solution quelconque ("générale") de l'éq diff hom associée : $y''(t) + a y'(t) + b y(t) = 0$

et y_p est une solution particulière (fixée) de (E).

On a vu au 2) comment trouver y_g ; reste à voir comment trouver y_p.

a) Principe de superposition.

Exemple : $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = 3t + 2 + e^{5t}$ (E)

On verra ci-dessous comment trouver :

- une fonction y_1 tq $y_1''(t) - 4y_1'(t) + 3y_1(t) = 3t + 2$
- une fonction y_2 tq $y_2''(t) - 4y_2'(t) + 3y_2(t) = e^{5t}$.

Alors en additionnant ces 2 équations on obtient :

$$(y_1+y_2)''(t) - 4(y_1+y_2)'(t) + 3(y_1+y_2)(t) = 3t+2+e^{5t}$$

donc y_1+y_2 est une sol. particulière de (E).

<u>Prop</u> ("Principe de superposition") : Si y_1 est une solution de

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = c_1(t)$$

et si y_2 est une solution de

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = c_2(t)$$

alors y_1+y_2 est une solution de

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = c_1(t) + c_2(t).$$

b) Cas d'un second membre polynomial

Supposons que $c(t)$ est un polynôme de degré n, c'est-à-dire que $c(t)$ s'écrit sous la forme :

$$c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \dots + c_1 t + c_0$$

avec $c_n \neq 0$ et $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Ex : $c(t) = 5t^3 - 3t + 2$ est un polynôme de degré 3 mais $5t^3 + 3\sqrt{t} + 2$ n'est pas un polynôme (à cause du $\sqrt{t} = t^{1/2}$: seuls les exposants entiers ≥ 0 sont autorisés), et $5t^3 - 3t + \frac{1}{t}$ n'est pas un polynôme non plus (à cause du $\frac{1}{t} = t^{-1}$).

NB : c polynôme de degré $0 \iff c(t) = c_0$ constante non nulle

c polynôme de degré $1 \iff c(t) = c_1 t + c_0$ avec $c_1 \neq 0$.

——— $2 \iff c(t) = c_2 t^2 + c_1 t + c_0$ avec $c_2 \neq 0$.

Th : Soit c un polynôme de degré n.
Alors l'éq diff linéaire d'ordre 2

$$y''(t) + a y'(t) + b y(t) = c(t)$$

possède une solution qui est un polynôme de degré
$$\begin{cases} n & \text{si } b \neq 0 \\ n+1 & \text{si } b = 0 \text{ et } a \neq 0 \\ n+2 & \text{si } b = a = 0. \end{cases}$$

Preuve : admis.

Exemple : 1 $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = 3t + 2$.

On cherche une solution particulière de cette éq (il suffira ensuite d'ajouter la solution générale de l'éq hom associée vue au 2)).

Ici $c(t) = 3t + 2$ est de degré 1

$= c_1 t + c_0$ avec $c_1 = 3 \neq 0$

Ici $b = 3 \neq 0$ (coeff de y dans l'équation)

Le Th ci-dessus suggère de chercher une

Sol. partic. qui soit polynomiale de degré 1.

Cherchons $y(t)$ sous la forme $a_1 t + a_0$ avec $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$.

On remplace dans l'équation:

d'où $y'(t) = a_1$

$y''(t) = 0$

$$y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = 3t + 2$$

$$\Longleftrightarrow 0 - 4a_1 + 3(a_1 t + a_0) = 3t + 2$$

$$\Longleftrightarrow 3a_1 t + (-4a_1 + 3a_0) = 3t + 2.$$

Ceci doit être vrai pour tout $t \in I$ donc par identification cela équivaut à :

$$\begin{cases} 3a_1 = 3 \\ -4a_1 + 3a_0 = 2 \end{cases}$$

on identifie le coefficient de t à gauche et à droite, et aussi le coefficient constant (sans t).

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ 3a_0 = 2 + 4a_1 = 2 + 4 = 6 \quad \text{i.e. } a_0 = 2. \end{cases}$$

Conclusion : la fonction $y(t) = t + 2$ est une solution particulière de

$$y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = 3t + 2.$$

NB : Ce Th s'applique aussi à l'ordre 1 : il existe une solution de $y'(t) + b\,y(t) = c(t)$ qui est polynomiale de degré $\begin{cases} n \text{ si } b \neq 0 \\ n+1 \text{ si } b = 0. \end{cases}$

[mais il est moins utile car on peut appliquer la variation de la const.]

[Idée de la preuve (à l'ordre 2, si $b \neq 0$) :

$$\mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$$
$$P \longmapsto P'' + aP' + bP$$

est une application linéaire injective (car $b \neq 0$) donc surjective (car endomorphisme d'un ev de dim finie).]

Autres exemples d'application du Th :

② $y''(t) + y'(t) = 3t^2$.

Ici $c(t) = 3t^2$ est un polynôme de degré $n = 2$

On a $b=0$, et $a = 1 \neq 0$

Donc on cherche une solution particulière polynomiale de degré $n+1 = 3$.

$$y(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0.$$

$$y'(t) = 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1$$

$$y''(t) = 6a_3 t + 2a_2$$

On a :

$$y''(t) + y'(t) = 3t^2$$

$$\Leftrightarrow 6a_3 t + 2a_2 + 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1 = 3t^2$$

$$\Leftrightarrow 3a_3 t^2 + (6a_3 + 2a_2) t + (2a_2 + a_1) = 3t^2 + 0t + 0$$

par identification

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3a_3 = 3 \\ 6a_3 + 2a_2 = 0 \\ 2a_2 + a_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a_3 = 1 \\ 2a_2 = -6a_3 = -6 \quad \text{i.e. } a_2 = -3 \\ a_1 = -2a_2 = 6 \end{cases}$$

Donc le polynôme $y(t) = t^3 - 3t^2 + 6t + a_0$ est solution de $y''(t) + y'(t) = 3t^2$ quel que soit $a_0 \in \mathbb{R}$.

On doit juste à ce stade trouver une solution donc on peut choisir une valeur pour a_0, par exemple $a_0 = 0$.

Solutions de l'éq hom. associée :

$$y''(t) + y'(t) = 0$$

Éq caract : $\quad r^2 + r = 0$

$$r(r+1) = 0$$

Racines : 0 et -1, $\Delta > 0$, (i).

Solutions de l'éq hom : $y(t) = \lambda e^{0t} + \mu e^{-1t}$

$y(t) = \lambda + \mu e^{-t}$.

Finalement les solutions de $y''(t) + y'(t) = 3t^2$ sont exactement les fonctions de la forme :

$$\underbrace{t^3 - 3t^2 + 6t}_{\text{Sol. particulière qu'on a trouvée}} + \underbrace{\lambda + \mu e^{-t}}_{\text{Sol. générale de l'éq hom associée}}, \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

c) Cas d'un second membre polynôme exponentiel.

Th : Supposons que c est de la forme

$$c(t) = p(t)\, e^{rt}$$

avec p polynôme de degré n et $r \in \mathbb{R}$.

Alors l'éq diff linéaire d'ordre 2

$$y''(t) + a y'(t) + b y(t) = c(t)$$

possède une solution de la forme $q(t)\, e^{rt}$

où q est un polynôme de degré :

$$\begin{cases} n \text{ si } r^2 + ar + b \neq 0 \\ n+1 \text{ si } r^2 + ar + b = 0 \text{ et } 2r + a \neq 0 \\ n+2 \text{ si } r^2 + ar + b = 0 \text{ et } 2r + a = 0 \end{cases}$$

NB : Ce degré est en fait

n si r n'est pas racine de X^2+aX+b

$n+1$ si r est racine simple de X^2+aX+b

$n+2$ —————— double —————— .

Ce Th est admis.

Ex : $y''(t)-4y'(t)+3y(t)=e^{5t}$.

Ici le second membre est bien de la forme

$c(t)=p(t)\,e^{rt}$ avec $\begin{cases} r=5 \\ p(t)=1 \end{cases}$

p est un polynôme de degré $n=0$.

Eq carac : $X^2 - 4X + 3$.

$r = 5$ n'est pas racine de cette éq car $5^2 - 4\times5+3 = 8 \neq 0$

Le Th affirme que l'éq avec second membre possède une solution de la forme $q(t)e^{5t}$ avec q polynôme de degré $n = 0$: $q(t) = a_0$.

$y(t) = a_0 e^{5t}$; on remplace :

$$y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = e^{5t}$$

$$\iff 25a_0 e^{5t} - 4\times 5a_0 e^{5t} + 3a_0 e^{5t} = e^{5t}$$

$$\iff 8a_0 e^{5t} = e^{5t}$$

$\Longleftrightarrow \quad 8a_0 = 1$

$\Longleftrightarrow \quad a_0 = 1/8.$

Conclusion : $y(t) = \frac{1}{8} e^{5t}$ est une solution particulière.

d) Autres seconds membres.

On peut essayer de chercher y sous une forme qui ressemble au second membre.

III Equations différentielles non linéaires à variables séparable.

Eq. diff. non linéaire : n'importe quelle relation entre t, $y(t)$, $y'(t)$, $y''(t)$, ...

C'est souvent à peu près impossible à résoudre avec des formules explicites pour $y(t)$.

Ex : $\sin(y'(t))\; y(t)^2 + 5\exp(y(t)\,y'(t)^2) = \frac{1}{1+t^2}$.

Déf : Une équation différentielle est dite à variables séparables (ou : à variables séparées) si elle est de la forme :

$$y'(t) = f(y(t))\, g(t)$$

où f et g sont deux fonctions.

Méthode pour résoudre une eq diff à variables séparables :

Étape 1 : chercher les solutions constantes : $y(t) = y_0$.

Pour une telle solution on a $y'(t) = 0$, donc :

$$y \text{ solution} \iff \forall t \in I \quad 0 = f(y(t))\, g(t)$$

$$\iff \forall t \in I \quad 0 = f(y_0)\, g(t)$$

En supposant que g n'est pas identiquement nulle sur I :

$$y \text{ solution} \iff f(y_0) = 0.$$

quitte à restreindre I si nécessaire

Étape 2 : on se donne y une solution sur un intervalle I et on ~~suppose~~ suppose que $f(y(t))$ ne s'annule pas sur I. Alors :

ici les variables sont séparées : y à gauche t à droite

$$\frac{y'(t)}{f(y(t))} = g(t) \quad \text{pour tout } t \in I.$$

On peut alors primitiver les 2 membres.

Notons Φ une primitive de $\frac{1}{f}$, et G une primitive de g sur I.

Alors :

$$\exists c \ \forall t \in I \quad \Phi(y(t)) = G(t) + c.$$

Si Φ est bijective (entre des intervalles à préciser) :

$\forall t \in I \quad y(t) = \Phi^{-1}\left(G(t) + c\right)$ en pratique on explicite Φ^{-1} et G

Étape 3 : Vérifier qu'une telle fonction est bien solution sur I (Étape nécessaire ou pas selon les hypothèses faites à l'étape 2).

Étape 4 : si on a dû rétrécir l'intervalle à l'étape 2, essayer de recoller les solutions.

on veut résoudre sur $\mathbb{R}$:

Exemple 1 : $y'(t) = \underbrace{t}_{g(t)} \underbrace{\exp(-y(t))}_{= f(y(t))}$. $\quad (E)$

(E) $\Leftrightarrow$ $y'(t)\exp(y(t)) = t$ en multipliant des 2 côtés par $\exp(y(t))$ qui ne s'annule pas.

Si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ alors en intégrant :

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \exp(y(t)) = \frac{1}{2}t^2 + c.$$

En particulier pour $t=0$ on a :

$$\exp(y(0)) = c \quad \text{donc} \quad c > 0.$$

D'où $\frac{1}{2}t^2 + c > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et

$$y(t) = \ln\left(\frac{1}{2}t^2 + c\right).$$

Bilan : on a montré que si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ alors

$$\exists c > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = \ln\left(\frac{1}{2}t^2 + c\right).$$

Réciproque : si y est de cette forme avec $c > 0$ alors y est solution :

→ soit on le vérifie par un calcul direct (on remplace dans l'équation)

→ soit on dit qu'il suffit de remonter les calculs précédents.

Exemple 2 : $y'(t) = t\,y(t)$ à résoudre sur $\mathbb{R}$.

Etape 1 : Solutions constantes : $y(t) = y_0$ tq

$\forall t \in \mathbb{R} \quad 0 = t\,y_0$

La seule solution constante est la fonction nulle.

Etape 2 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$

y une solution de $y'(t) = t\,y(t)$ sur I

On suppose que y ne s'annule pas sur I.

Alors : $\forall t \in I \quad \dfrac{y'(t)}{y(t)} = t$

On primitive :

$\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall t \in I \quad \ln|y(t)| = \frac{1}{2}t^2 + c$

$$|y(t)| = \exp\left(\frac{1}{2}t^2 + c\right).$$

$$y(t) = \pm \exp\left(\frac{1}{2}t^2 + c\right)$$

n'a pas un sens mathématique précis car on ne sait pas de quoi dépend ce signe.

Pour chaque $t \in I$ on a $|y(t)| = \exp\left(\frac{1}{2}t^2 + c\right)$

donc il existe $\varepsilon(t) \in \{1, -1\}$ tel que

$$y(t) = \varepsilon(t) \exp\left(\frac{1}{2}t^2 + c\right).$$

⚠ ici le signe $\varepsilon(t)$ dépend de t (a priori)

Astuce : $$\varepsilon(t) = \frac{y(t)}{\exp\left(\frac{1}{2}t^2+c\right)}$$

Or y est continue sur I (et même dérivable)

donc ε est continue sur I. En outre ε

ne prend pour valeurs que 1 et -1.

Si ε prenait à la fois les valeurs 1 et -1

(i.e. si il existait $t_1, t_2 \in I$

tel que $\varepsilon(t_1) = 1$ et $\varepsilon(t_2) = -1$)

alors d'après le TVI (puisque ε est continue sur I) il existerait $t_3 \in I$ tel que $\varepsilon(t_3) = 0$ ce qui n'est pas possible puisque $\forall t \in I \quad \varepsilon(t) \in \{1, -1\}$.

Donc la fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \{-1, 1\}$ est en fait constante.

Bilan :
$$y(t) = \varepsilon \exp\left(\frac{1}{2}t^2 + c\right)$$
avec $\varepsilon \in \{1, -1\}$ indépendant de t.
$$y(t) = \varepsilon e^c \exp\left(\frac{1}{2}t^2\right)$$

Posons $\lambda = \varepsilon e^c \in \mathbb{R}^*$. Alors $y(t) = \lambda \exp(\frac{1}{2}t^2)$.

<u>Bilan</u> : <u>Etape 1</u> : Solution constante $y(t) = 0$.

<u>Etape 2</u> : Si y solution sur un intervalle et ne s'y annule pas alors elle est de la forme

$$y(t) = \lambda \exp(\frac{1}{2}t^2) \text{ sur cet intervalle.}$$

<u>Réciproque</u> pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction

$$y(t) = \lambda \exp(\frac{1}{2}t^2) \text{ est solution sur } \mathbb{R}$$

de l'éq diff.