Cours n° 2
2/2/2021

Chapitre 1 : Fonctions réciproques (suite)

I Propriétés des fonctions réciproques (suite).

1) Fonctions de classe C^k

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec I intervalle (ou réunion d'intervalles...)

On dit que f est de classe C^k sur I (avec $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$)

si : (i) f est dérivable k fois sur I

(ii) $f^{(k)}$ est continue sur I.

$k=0$: f C^0 sur I $\Longleftrightarrow$ f continue sur I.

$k=1$: f C^1 sur I $\Leftrightarrow$ f dérivable et f' continue sur I

$k=2$: f $\mathcal{C}^2$ sur I $\Longleftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} f \text{ dérivable 2 fois} \\ \text{et } f'' \text{ continue sur } I. \end{array}\right.$

$k=\infty$: f $\mathcal{C}^\infty$ sur I $\Longleftrightarrow$ $\forall j \in \mathbb{N}$ f est dérivable j fois

"f est indéfiniment dérivable".

NB : Si f dérivable $k+1$ fois alors f est de classe $\mathcal{C}^k$.

[car $f^{(k)}$ dérivable $\Rightarrow$ $f^{(k)}$ continue].

NB : Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ alors f est dérivable k fois.

Propriété : le fait d'être de classe $\mathcal{C}^k$ (pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) est préservé par somme, combinaison linéaire, produit, quotient (si le dénominateur ne s'annule pas sur I), composition.

2) Dérivabilité et classe $\mathcal{C}^k$ de f^{-1}

__Th__ : Soit $f : I \to \mathbb{R}$, avec I intervalle de $\mathbb{R}$.
On suppose que f est continue et strictement monotone sur I : elle réalise une bijection de I dans un intervalle J. Alors :

(i) Pour tout $x_0 \in I$ tel que f soit dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$:

* f^{-1} est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$

$$* \ (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

(ii) Soit $n \geq 1$. Si f est dérivable n fois sur I (respectivement de classe $\mathcal{C}^n$ sur I) et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable n fois sur J (resp. de classe $\mathcal{C}^n$ sur J) et on a :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

i.e. $\forall y \in J \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$

<u>Preuve</u> : (ii) (en admettant (i)) : Récurrence sur n.

$\boxed{n=1}$ c'est (i).

Supposons (ii) vraie pour un entier $n \geq 1$. Soit f dérivable $n+1$ fois! et f' ne s'annule pas sur I. Alors par hyp de récurrence f^{-1} est dérivable n fois et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Or f^{-1} dérivable n fois et f' aussi donc leur composée aussi puis l'inverse de cette composée (qui ne s'annule pas). <u>Conclusion</u> : $(f^{-1})'$ est dérivable n fois. Donc f^{-1} est dérivable $n+1$ fois sur J.

<u>NB</u> : avec "de classe C^n" la preuve est similaire.

(i) On suppose f dérivable en x_0.

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

$$\varepsilon(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$$
pour $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in I$

Posons
$$\begin{cases} \varepsilon(x - x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \text{ pour } x \neq x_0 \\ \varepsilon(0) = 0. \end{cases}$$

Alors $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. On peut écrire :

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\left(\varepsilon(x - x_0) + f'(x_0)\right)$$

$\forall x \in I$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x - x_0)$$

Notons $y_0 = f(x_0)$. d'où $f^{-1}(y_0) = x_0$. Soit $y \in J$. On applique la relation précédente à $x = f^{-1}(y) \in I$:

$$y = y_0 + \left(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right) f'(x_0) + \left(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right) \times \varepsilon\left(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right).$$

au lieu de $f'(x_0)$ on pourrait écrire $f'(f^{-1}(y_0))$, c'est pareil

$$y - y_0 = \left(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right) \underbrace{\left(f'(x_0) + \boxed{\varepsilon\big(\underbrace{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}_{\xrightarrow[y \to y_0]{} 0 \text{ car } f^{-1} \text{ continue en } y_0}\big) \xrightarrow[y \to y_0]{} 0}\right)}_{\text{on le note } g(y)}$$

avec $g(y) \xrightarrow[y \to y_0]{} f'(x_0)$

Alors pour $y \neq y_0$ on en déduit que $g(y) \neq 0$ et :

$$\frac{1}{f'(x_0)} \xleftarrow[y \to y_0]{} \frac{1}{g(y)} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

taux d'accroissement de f^{-1} au point y_0

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ y \neq y_0}} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$.

II Les fonctions puissances

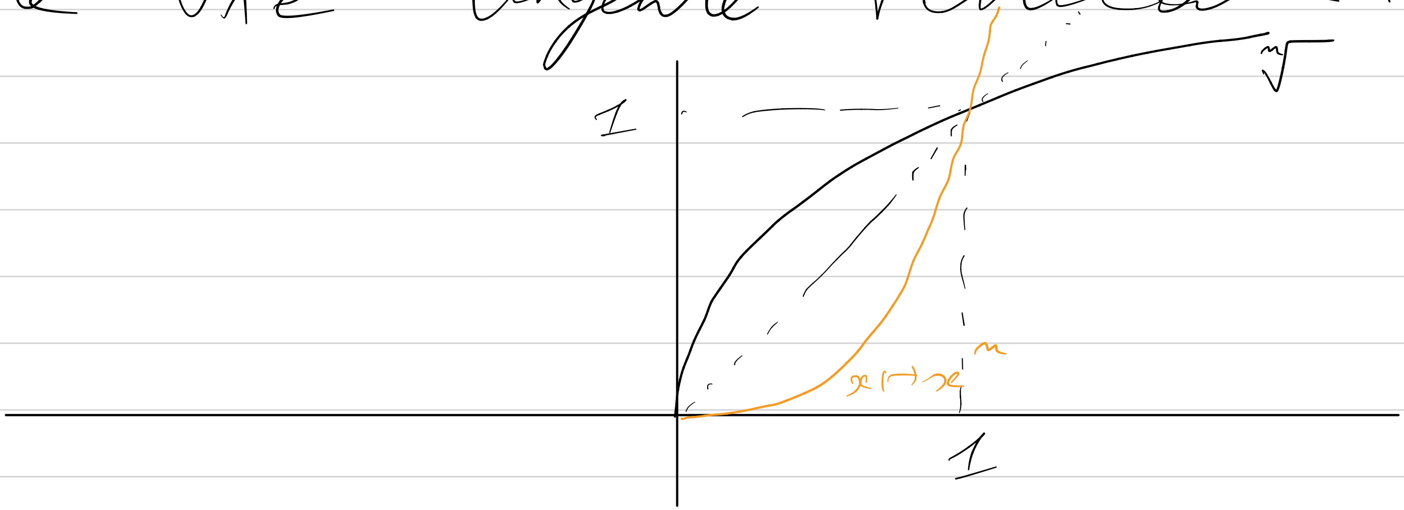
1) Racines $n^{\text{ièmes}}$ avec n pair

Th : Soit n un entier PAIR avec $n \geq 2$.
Alors la fonction $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longmapsto x^n$ est bijective. Sa bijection réciproque s'appelle la fonction racine $n^{\text{ième}}$ et se note $\sqrt[n]{}$. Elle est continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Sa dérivée est la fonction $\begin{array}{ccc} x & \longmapsto & \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \\ \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$

Elle n'est pas dérivable en 0 ; son graphe y possède une tangente verticale.

Graphe :



Preuve : $f : \begin{array}{ccc} x & \longmapsto & x^n \\ \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \end{array}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, valant 0 en 0 et tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n\,(f^{-1}(x))^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n}\left(\sqrt[n]{x}\right)^{1-n}$$

$$= \frac{1}{n}\, x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1}$$

↳ en anticipant sur la notation x^r, $r \in \mathbb{Q}$, $x > 0$.

<u>Tangente en 0</u> : $\dfrac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0}}{x - 0} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{x} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{(\sqrt[n]{x})^n} = \dfrac{1}{(\sqrt[n]{x})^{n-1}} \longrightarrow +\infty$

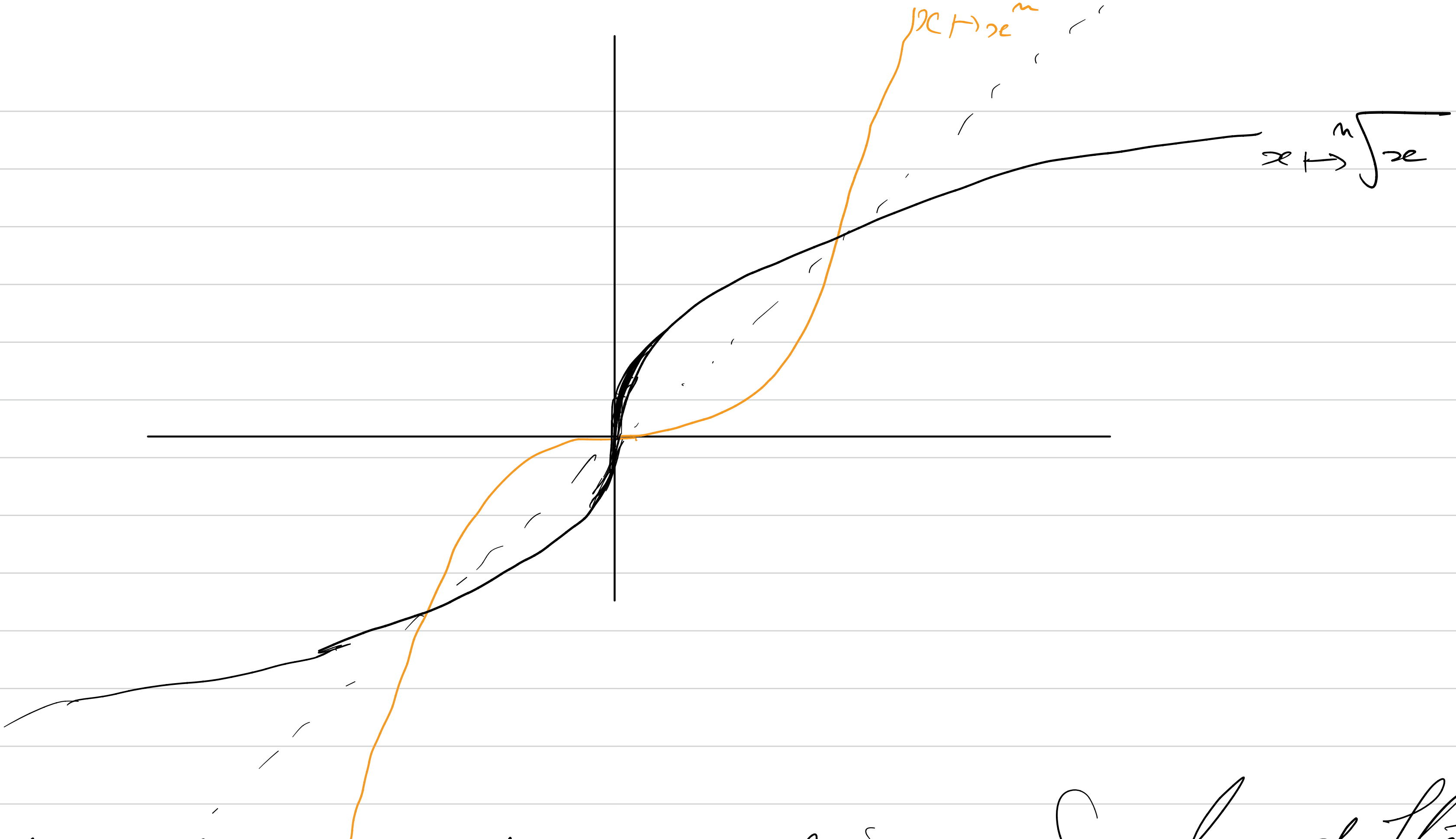
pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

donc le graphe de $\sqrt[n]{\ }$ possède bien une tangente verticale en 0.

A retenir : pour n pair la fonction $\sqrt[n]{}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, et seulement sur $\mathbb{R}_+$.

2°) Racines $n^{\text{ième}}$ pour n impair.

Th : Soit $n \geq 3$ un entier impair.
La fonction $x \longmapsto x^n$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective.
Sa bijection réciproque s'appelle la fonction racine $n^{\text{ième}}$ et se note $\sqrt[n]{}$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, et son graphe présente en 0 une tangente verticale. Pour tout $x \neq 0$ sa dérivée en x vaut $\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.



Preuve : comme pour n pair. Seule différence : en notant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f'(x) = n x^{n-1} > 0$.
Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

A RETENIR : Pour n impair, la fonction $\sqrt[n]{\ }$ est définie sur $\mathbb{R}$.

3) Exposants rationnels.

Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (ie $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$)

Pour $x > 0$ on pose :

$$x^r = x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$$

preuve de ceci : il s'agit de montrer que $\left(\sqrt[q]{x}\right)^p$ est l'antécédent dans $\mathbb{R}_+$ de x^p par la fonction $t \mapsto t^q$. En effet on a $\left(\sqrt[q]{x}\right)^p \in \mathbb{R}_+$ et :

$$\left[\left(\sqrt[q]{x}\right)^p\right]^q = \left(\sqrt[q]{x}\right)^{pq} = \left[\left(\sqrt[q]{x}\right)^q\right]^p = x^p \quad \text{OK}$$

On peut démontrer que x^r ne dépend que de r et pas de p, q tels que $\frac{p}{q} = r$.

4) Exposants réels.

Déf : Pour $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose :

$$\boxed{x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)}$$

Ex : $2^{\sqrt{3}} = \exp(\sqrt{3} \ln 2)$.

Propriétés : Pour $x, y > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a :

$$1^\alpha = 1 \qquad x^1 = x$$

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta \qquad x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$$

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

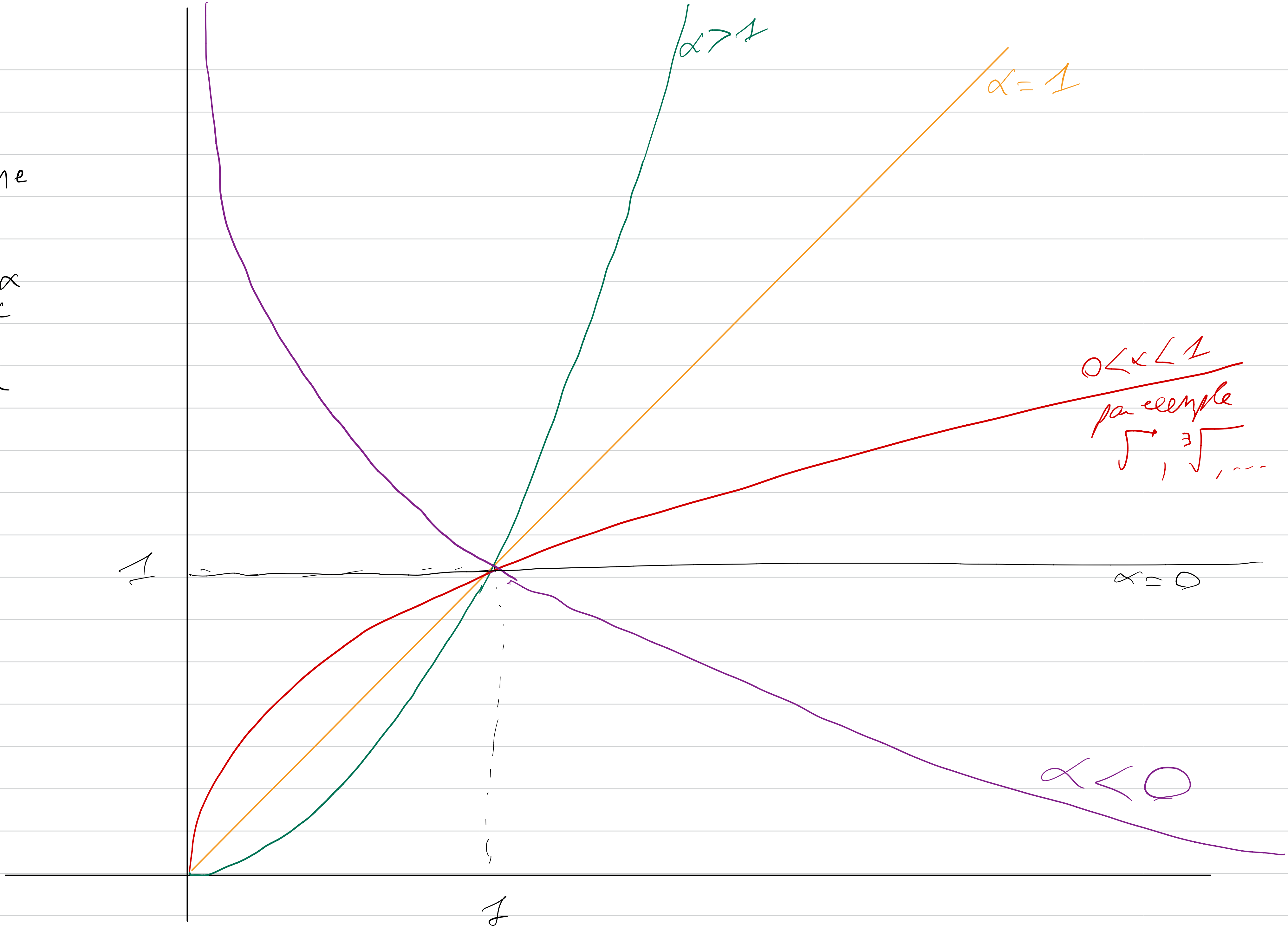
$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$$

Preuve : propriétés de exp et ln.

Prop : La fonction $\begin{array}{l} x \longmapsto x^\alpha \\ \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est $x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

Graphe de $x \mapsto x^\alpha$

$\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$



Prop : $\forall x > 0$ $\forall n \geq 2$ $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

Prop : Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. La fonction $\begin{array}{l} x \longmapsto x^{\alpha} \\ \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \end{array}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, et la bijection réciproque est $\begin{array}{l} x \longmapsto x^{1/\alpha} \\ \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \end{array}$.

Preuve : $y = x^{\alpha} \iff y^{1/\alpha} = x$.

En effet $(x^{\alpha})^{1/\alpha} = x^{\alpha \times \frac{1}{\alpha}} = x^1 = x$.

5) Th de croissance comparée.

Prop : On a les limites suivantes :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} e^{x} = +\infty$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^{x}} = 0$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^{\alpha} \ln x = 0$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_-^* \qquad \lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} \ln x = 0$$

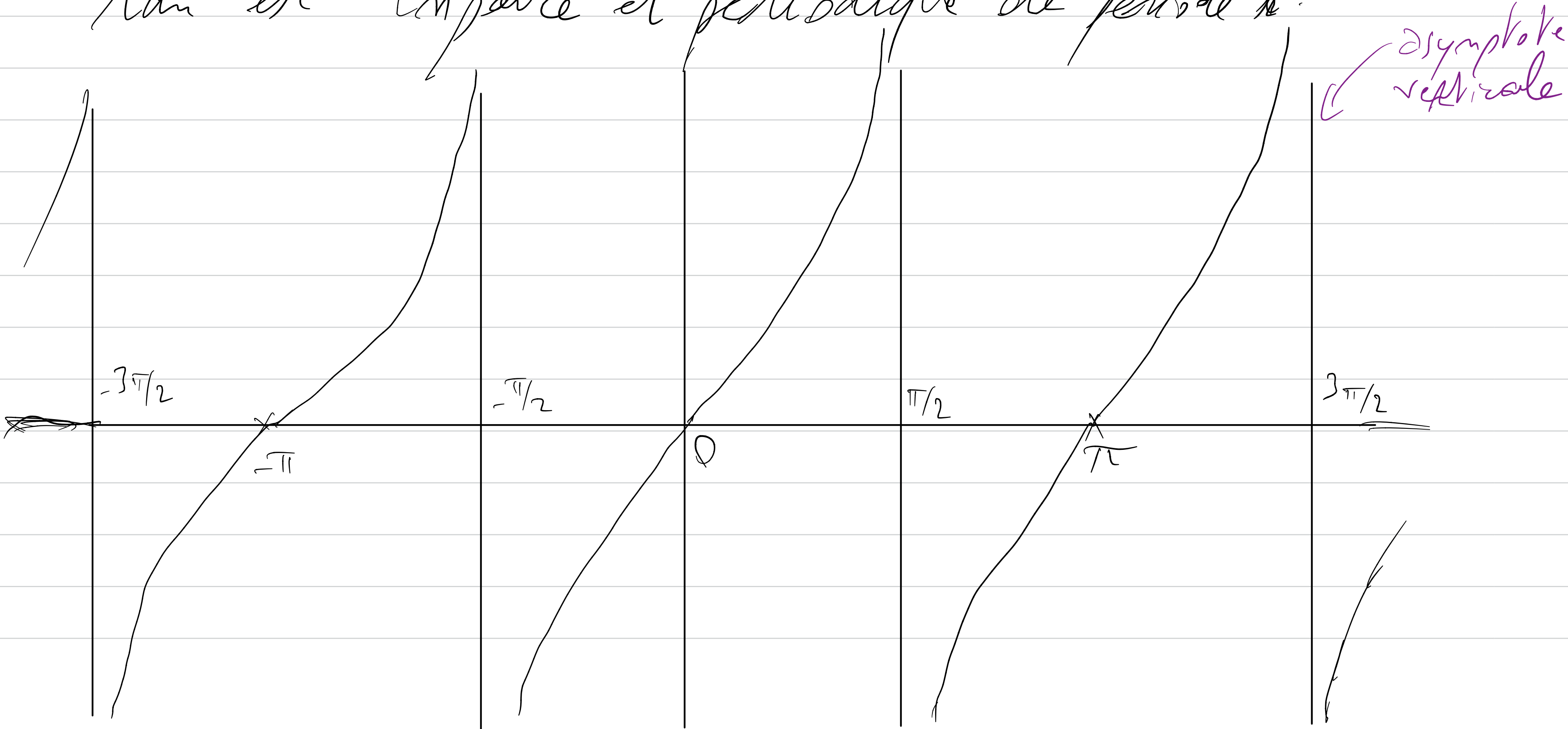
II Fonctions trigonométriques réciproques.

1) Arctangente.

Rappel : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ défini pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$\tan$ C^∞ sur cet ensemble et $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

$\tan$ est impaire et périodique de période π.



A retenir : on rend tan bijective en la restreignant à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Déf : On appelle arctangente, et on note arctan, la bijection réciproque de la restriction de tan à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Th : La fonction arctan est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

Elle est impaire et on a :

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

<u>Preuve</u> : ⊛ $\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante et continue sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$; elle tend vers $-\infty$ en $-\frac{\pi}{2}$ et vers $+\infty$ en $\frac{\pi}{2}$. Donc elle réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. Donc sa bijection réciproque arctan existe.

⊛ tan est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et

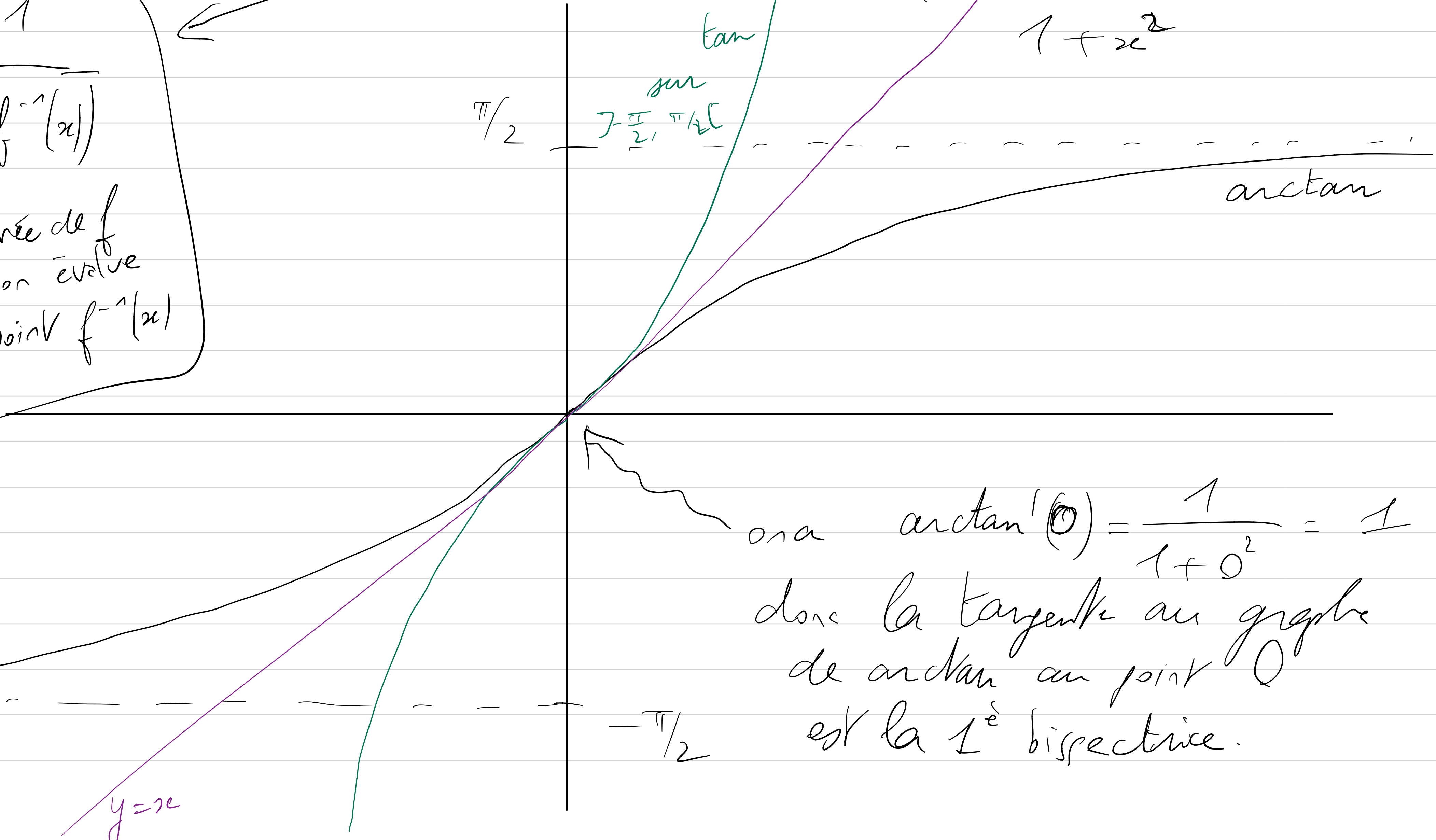
$\forall \theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\qquad \tan'(\theta) = 1+\tan^2\theta > 0$

donc arctan est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+(\tan(\arctan x))^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

↑ dérivée de f qu'on évalue au point $f^{-1}(x)$



On a $\arctan'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1$

donc la tangente au graphe de arctan au point 0 est la $1^{è}$ bissectrice.

NB : On a $\forall x \in \mathbb{R}$ $\tan(\arctan x) = x$.

Mais pour $\theta \in \mathbb{R}$, a-t-on toujours

$$\arctan(\tan \theta) = \theta \quad ?$$

⚠ arctan et tan sont des bijections réciproques A CONDITION D'ETRE SUR LES BONS INTERVALLES.

Pour $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a bien $\arctan(\tan \theta) = \theta$.

Si $\theta \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ cette formule est fausse.

Ex : $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi$.

$$\arctan(\tan\theta) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)\right)$$

$$= \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$ car tan est périodique de période π

$$= \arctan 1$$

$$= \frac{\pi}{4} \quad \text{car} \quad \left| \begin{array}{l} \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{array} \right.$$

$\neq \frac{\pi}{4} + \pi$ c'est-à-dire $\arctan(\tan\theta) \neq \theta$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Rappel important}} \text{ pour montrer que } \arctan x = \theta \\ \text{il faut et il suffit de montrer que} \\ \tan\theta = x \quad \underline{\underline{\text{ET}}} \quad \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[. \end{array}}$$

Combien vaut $\arctan(\tan\theta)$?

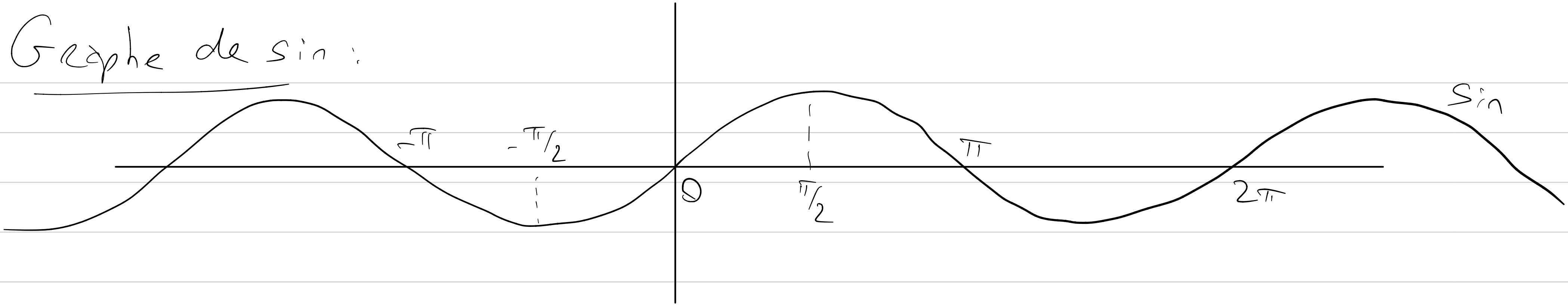
<u>Prop</u> : Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ unique tel que
$\theta - k\pi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Et on a :

$$\arctan(\tan\theta) = \theta - k\pi.$$

<u>Preuve</u> : $\tan(\theta) = \tan(\theta - k\pi)$ par π-périodicité
donc $\arctan(\tan\theta) = \arctan(\tan(\theta - k\pi))$
$= \theta - k\pi$ car $\theta - k\pi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2) La fonction arcsinus.

Graphe de sin :

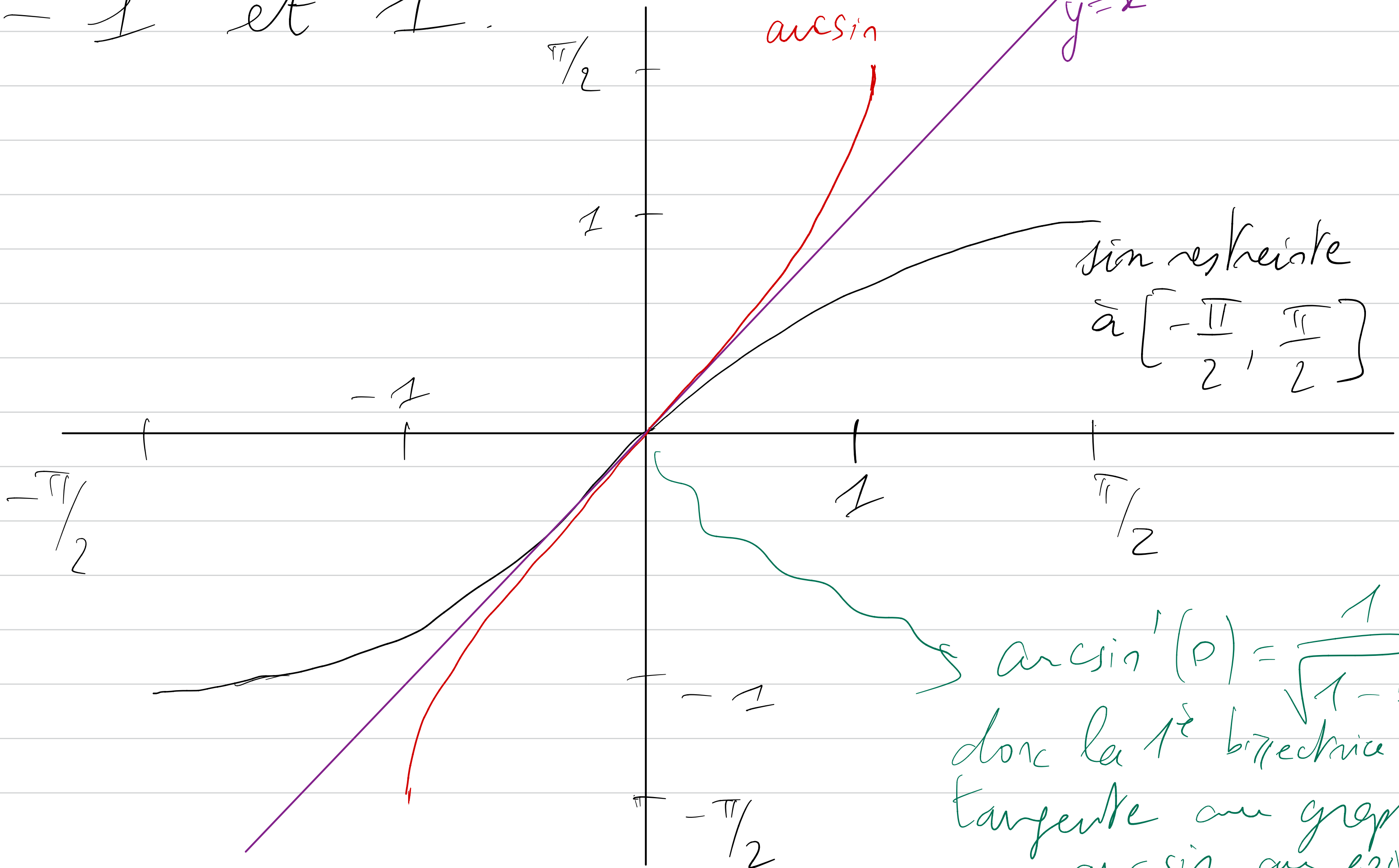


Déf : On appelle arcsinus et on note arcsin la bijection réciproque de la restriction de sin à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Th : arcsin est définie sur $[-1,1]$, et elle est à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Elle est continue sur $[-1,1]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, avec :

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Elle est impaire et strictement croissante sur $[-1,1]$. Son graphe possède des tangentes verticales aux points d'abscisses -1 et 1.



$\arcsin'(0) = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1$

donc la 1ère bissectrice est la tangente au graphe de arcsin au point 0.

Preuve : $\sin_{|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^\infty$

strictement croissante, $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

$\forall \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $\quad \sin'(\theta) = \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$ car $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

et $\sqrt{\cos^2\theta} = |\cos\theta|$
$= \cos\theta$
car $\cos\theta \geq 0$
car $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

d'où $\sin'(\theta) \neq 0$ pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc arcsin est dérivable sur $]-1,1[$, et :

$\forall x \in]-1,1[$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin x))^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$ car $\sin(\arcsin x) = x$ puisque $x \in [-1,1]$.

⚠ $\sin(\arcsin x) = x$ pour $x \in [-1, 1]$

L'EGALITE N'A PAS DE SENS POUR $x \notin [-1, 1]$

$\arcsin(\sin\theta) = \theta$ pour $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

L'EGALITE EST FAUSSE POUR $\theta \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

⚠ Même problème que d'écrire :

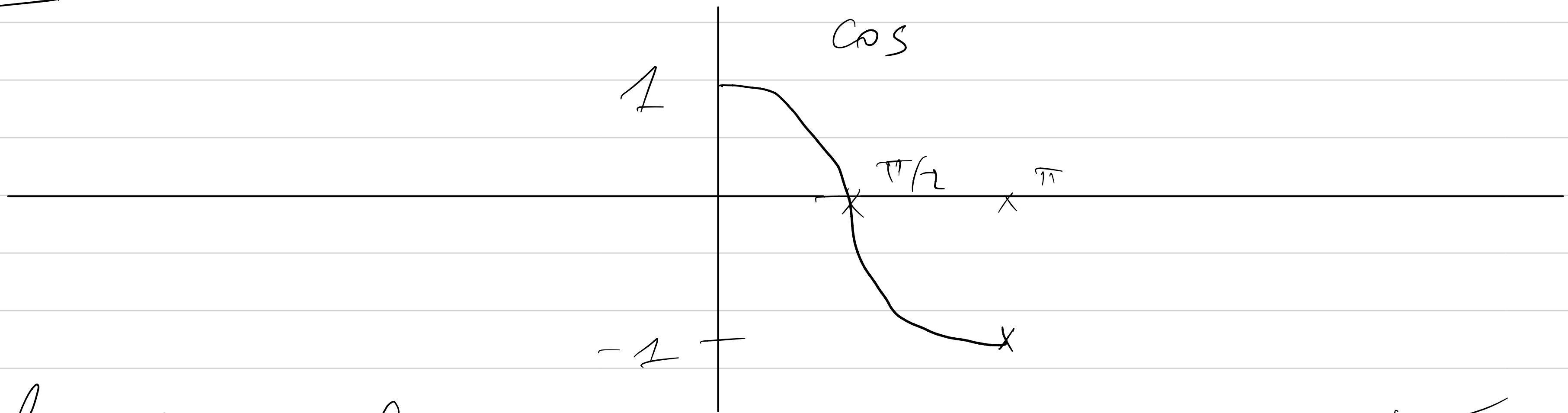
$(\sqrt{x})^2 = x$ pour $x \geq 0$ et ça n'a pas de sens pour $x < 0$

$\sqrt{x^2} = x$ pour $x \geq 0$ et c'est FAUX pour $x < 0$

A retenir pour régler ce problème avec $\sqrt{\ }$:

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

3) Arccosinus.



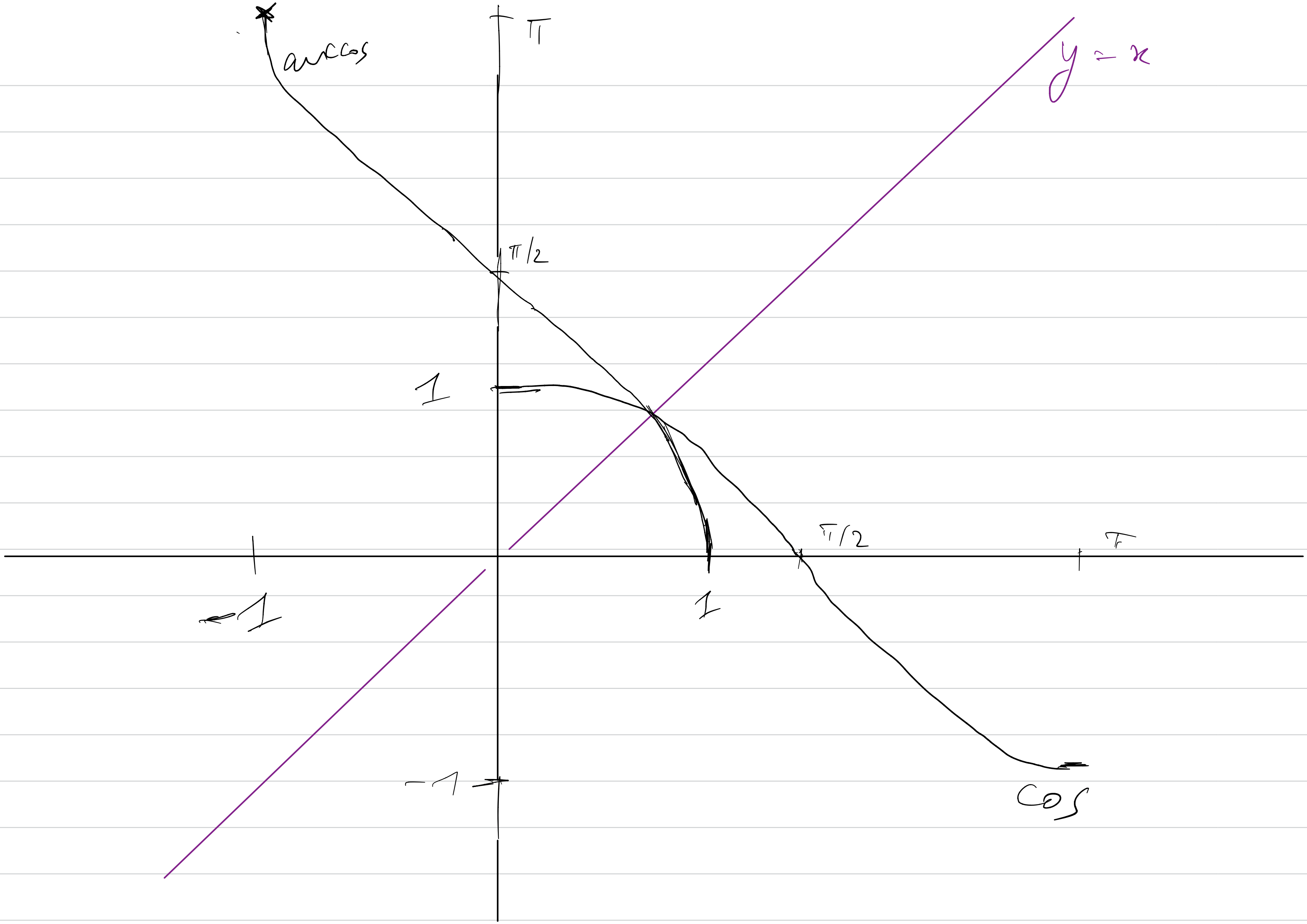
Déf : La fonction arccosinus, notée arccos, est la bijection réciproque de la restriction à $[0, \pi]$ de cos.

Th : arccos est définie sur $[-1, 1]$, à valeurs dans $[0, \pi]$. Elle est continue sur $[-1, 1]$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$, et :

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Elle est paire et strictement décroissante.

Son graphe possède des tangentes verticales aux points d'abscisse -1 et 1.



<u>Preuve</u> : analogue.

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{-1}{\sin(\arccos x)}$$

pour $x \in]-1,1[$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-(\cos(\arccos x))^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

car $\sin(\arccos x) > 0$ donc $\sin(\arccos x) = \sqrt{\sin^2(\arccos x)}$

car $\arccos x \in]0,\pi[$ $\qquad = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}$

<u>NB</u> : $\forall x \in]-1,1[\quad \arccos'(x) = -\arcsin'(x)$

donc $\arccos + \arcsin$ est constante

sur $[-1,1]$: elle vaut $\arccos(0) + \arcsin(0) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$.