Cours n° 3
9/2/2021

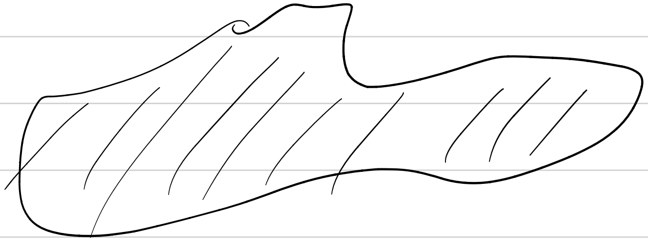
Chapitre 2 : intégrales (1/3)

MDD 151
Calcul intégral
L1 DD
IM/EM/MSV

I Primitives et généralités

Comment définir $\int_a^b f$?

Pdg : on suppose qu'on sait définir l'aire d'un domaine "raisonnable" du plan.



à partir de cela on définit $\int_a^b f$ pour f continue $[a,b] \to \mathbb{R}$.

cf. L3 : intégrale de Lebesgue

Ici autre point de vue à partir des primitives.

1) Primitives.

Th Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors il existe une primitive de f sur I.

Rappel: une primitive de f sur I est une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall x \in I$ $F'(x) = f(x)$.

Ce Th sera "démontré" (en esquisse) au 3^{e} cours sur les intégrales avec la notion d'intégrale de Riemann.

Pour l'instant ce Th est admis.

__Corollaire:__ Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue, avec I intervalle. Alors les primitives de f sur I sont exactement les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$, où F est une primitive fixée de f.

__Preuve:__ (⊂) si $g(x) = F(x) + c$ alors g dérivable sur I et $\forall x \in I$ $g'(x) = F'(x) = f(x)$ donc g est une primitive de f sur I.

(ii) Soit g une primitive de f sur I. Alors $g-F$ est dérivable sur I, et $\forall x \in I$ $(g-F)'(x) = g'(x) - F'(x) = \underbrace{f(x) - f(x)}_{=0}$

$g-F$ a une dérivée identiquement nulle sur I, avec I intervalle, donc $g-F$ est constante :

$g - F = c$, $\quad g = F + c$.

⚠ Si f est définie sur autre chose qu'un intervalle, ses primitives ne sont pas toutes de cette forme.

Ex : $f(x) = \frac{1}{x}$ définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

$\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ n'est pas un intervalle.

Les primitives de f sont les fonctions de la forme

$$g : x \longmapsto \begin{cases} \ln(x) + c_1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + c_2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (constantes).

NB : la dérivée de $\ln(-x)$ sur $\mathbb{R}^*_-$ est $\frac{1}{-x} \times (-1) = \frac{1}{x}$.

2) Lien entre primitives et intégrales.

Déf : Soit f continue sur $[a, b]$. Notons F une primitive de f sur $[a, b]$. On pose :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \text{ qui est noté } [F(x)]_a^b.$$

NB : Si on prend une autre primitive g au lieu de F, alors $\exists c \in \mathbb{R}\ \forall x \in [a,b]\ g(x) = F(x) + c$

d'où $g(b) - g(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$.

Donc $\int_a^b f$ ne dépend pas de la primitive choisie.

I est toujours un intervalle dans ce cours.

Th : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Soit $x_0 \in I$.

Alors $x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f$ est une primitive de f sur I.

C'est l'unique primitive de f qui s'annule en x_0.

Preuve : notons F une primitive de f sur I.

Alors $g(x) = \int_{x_0}^{x} f = F(x) - F(x_0)$.

La fonction $g : x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f$ est de la forme $F + \underbrace{\text{constante}}_{= -F(x_0)}$

donc c'est une primitive de f.

On a $g(x_0) = F(x_0) - F(x_0) = 0$: g s'annule en x_0.

Soit h une primitive de f qui s'annule en x_0.

Alors $\exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad h(x) = g(x) + c$.

Or $0 = h(x_0) = g(x_0) + c = c$

donc $c = 0$ et $h = g$: d'où l'unicité.

Intégrale : $\int_a^b f$: c'est un réel ; il faut avoir précisé les bornes a et b.

Primitive : fonction $I \to \mathbb{R}$.

Notation (parfois considérée comme abusive) :

on note $\int f$ (sans les bornes) une primitive de f.

⚠ cette notation ne définit pas bien la fonction qu'elle représente car f possède une infinité de primitives. Donc quand on l'utilise il faut toujours :

* écrire "+ constante" à la fin de chaque égalité
* préciser sur quel intervalle on travaille.

Ex : $\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) \underbrace{+\,c}_{\text{la constante}}$, $c \in \mathbb{R}$

sur $\mathbb{R}_+^*$

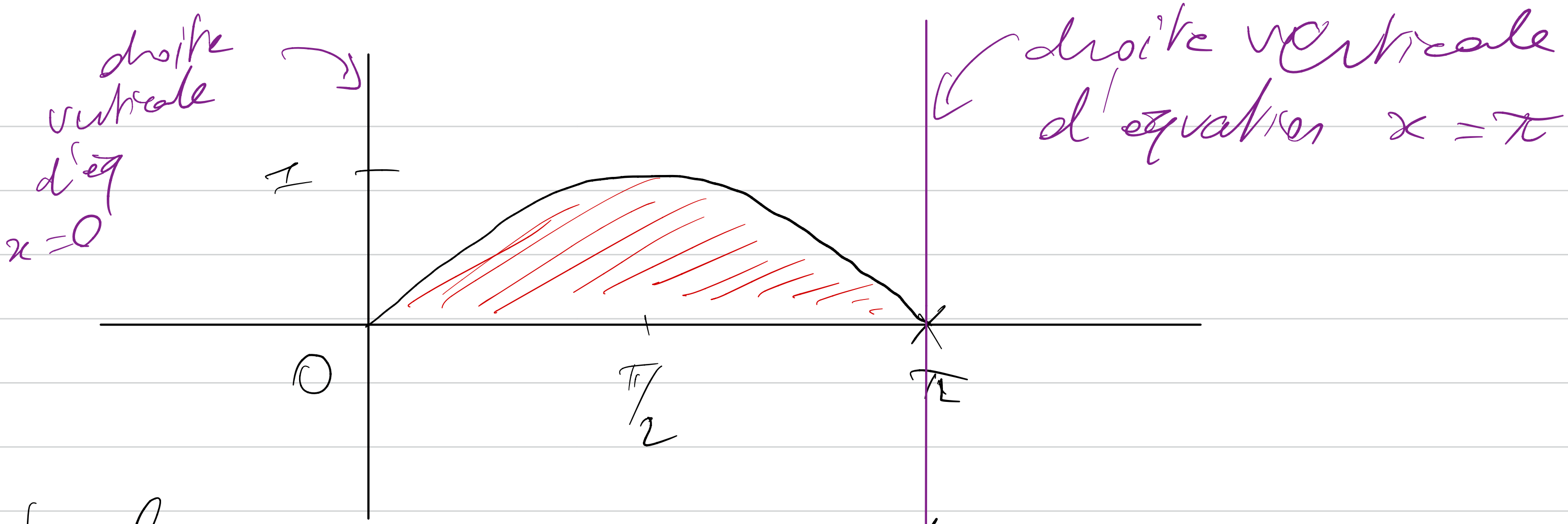
c'est bien un intervalle

3) Premières propriétés.

Propriété admise : Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et positive alors $\int_a^b f$ représente l'aire du domaine compris entre

- l'axe des abscisses
- les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$
- la courbe représentative de f.

ET si $a \leq b$



l'aire hachurée en rouge vaut:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = \left[-\cos(x)\right]_0^{\pi}$$
$$= -\cos(\pi) + \cos 0$$
$$= -(-1) + 1 = 2.$$

Prop (Chasles) : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue.
Soient $a, b, c \in I$. Alors on a:

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f.$$

Preuve : Notons F une primitive de f sur I. Alors :

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \left(\cancel{F(b)} - F(a)\right) + \left(F(c) - \cancel{F(b)}\right) = F(c) - F(a) = \int_a^c f.$$

Corollaire : Pour $a, b \in I$: $\displaystyle\int_b^a f = -\int_a^b f.$

Preuve : prendre $c = a$; on obtient $\displaystyle\int_a^b f + \int_b^a f = \int_a^a f = F(a) - F(a) = 0.$

Rappel : $\displaystyle\int_a^a f = 0.$

Prop (linéarité) : Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ continues.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $a, b \in I$. Alors :

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\, dx = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Preuve notons F et G des primitives de f et g respectivement.
Posons $H(x) = \lambda F(x) + \mu G(x)$. Alors H est dérivable sur I
et $\forall x \in I \quad H'(x) = \lambda F'(x) + \mu G'(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$.
Donc H est une primitive de $\lambda f + \mu g$. D'où :

$$\int_a^b \lambda f + \mu g = H(b) - H(a) = \left(\lambda F(b) + \mu G(b)\right) - \left(\lambda F(a) + \mu G(a)\right)$$
$$= \lambda \left(F(b) - F(a)\right) + \mu \left(G(b) - G(a)\right) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a g.$$

Interprétation algébrique de cet énoncé :

notons E l'ensemble des fonctions continues sur I.

Alors E est un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$).

Notons $\varphi : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \int_a^b f \end{array}$ avec $a, b \in I$ fixés.

La proposition signifie que φ est une application linéaire.

4) Positivité.

Prop : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

Si f est positive sur $[a,b]$ et si $a \leq b$ alors

$$\int_a^b f \geq 0.$$

NB : Heureusement que cette Prop est vraie puisqu'on a vu que $\int_a^b f$ représente l'aire sous la courbe qui est ≥ 0.

⚠ ne pas oublier l'hypothèse $a \leq b$. Par ex

$$\int_5^1 \frac{dx}{x} = -\int_1^5 \frac{dx}{x} < 0$$

puisque $\int_1^5 \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^5$
$= \ln 5 - \ln 1$
$= \ln 5 > 0.$

Preuve : Notons F une primitive de f sur $[a,b]$.
Alors F est dérivable et $\forall x \in [a,b]$ $F'(x) = f(x) \geq 0$
donc F est croissante sur $[a,b]$ d'où

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \geq 0 \text{ (puisque } b \geq a\text{)}.$$

Prop [raffinement] Si f est continue sur $[a,b]$, positive, et non identiquement nulle sur $[a,b]$, et si $a<b$, alors $\int_a^b f > 0$.

Preuve : notons F une primitive. Par la Prop précédente on a $\int_a^b f \geq 0$. Supposons par l'absurde $\int_a^b f = 0$.

Alors $F(b) - F(a) = 0$ i.e. $F(b) = F(a)$.

Soit $x \in [a,b]$. Comme F est croissante sur $[a,b]$

(puisque $F' = f \geq 0$) on a $a \leq x \leq b$

donc $F(a) \leq F(x) \leq F(b) = F(a)$

donc $\forall x \in [a,b]$ $F(x) = F(a)$.

F est constante sur $[a,b]$ donc $\forall x \in [a,b]$ $f(x) = F'(x) = 0$.

$\boxed{\text{contradiction}}$

Corollaire Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues. Alors :

(i) Si $a \leq b$ et si $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \leq g(x)$

alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

(ii) Si $a < b$ et si $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \leq g(x)$

et si $\exists x \in [a,b]$ $f(x) < g(x)$

alors $\int_a^b f < \int_a^b g$.

Preuve on applique les Prop précédentes à $g-f$.

5) Inégalité des accroissements finis

Prop : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 avec $a \leq b$.

Soient $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in [a,b]$ $m \leq f'(x) \leq M$.

Alors :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Preuve : $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$ [astuce à retenir]

car f' est continue.

On a $\forall x \in [a,b]$ $m \leq f'(x) \leq M$.

Par la Prop précédente :

$$\int_a^b m \leq \int_a^b f' \leq \int_a^b M \quad \text{car } a \leq b.$$

$$[mx]_a^b \leq [f(x)]_a^b \leq [Mx]_a^b$$

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

II Calculs pratiques d'intégrales.

Difficulté : trouver une primitive d'une fonction donnée.
Parfois on ne peut même pas expliciter la primitive à l'aide de fonctions usuelles
(par ex : $x \mapsto \exp(x^2)$)

(**NB** : cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc possède une primitive sur $\mathbb{R}$, par exemple

$$x \longmapsto \int_0^x \exp(t^2)\,dt$$
)

En pratique on ne vous donnera à calculer que des intégrales pour lesquelles on peut s'en tirer !

1) Tableau des primitives.

primitivation

$F(x)$ (à constante additive près)	$f(x) = F'(x)$	I intervalle de validité
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left]\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right[, k\in\mathbb{Z}$

$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
$-\arcsin x$ ou $\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$.
x^n	$n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$
x^n	$n x^{n-1}$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$ si $n \in \mathbb{Z}, n<0$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \notin \mathbb{Z}$

Si u et v sont des fonctions dérivables sur I on a aussi:

$F(x)$	$f(x) = F'(x)$	intervalle I
$u(x)\,v(x)$	$u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$	I
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v(x)^2}$	J intervalle $\subset I$ tq v ne s'annule pas sur J
$\dfrac{1}{v(x)}$	$\dfrac{-v'(x)}{v(x)^2}$	J
$v(x)^n$	$n\,v'(x)\,v(x)^{n-1}$	I si $n \in \mathbb{N}$ J si $n \in \mathbb{Z}, n<0$
$v(x)^\alpha$	$\alpha\,v'(x)\,v(x)^{\alpha-1}$	K intervalle $\subset I$ tq $\forall x \in K$ $v(x) > 0$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$
$u(v(x))$ $= (u \circ v)(x)$	$v'(x)\,u'(v(x))$	intervalle à préciser dans chaque exemple

$\exp(v(x))$	$v'(x)\exp(v(x))$	
$\ln(v(x))$	$\dfrac{v'(x)}{v(x)}$	K
$\ln\lvert v(x)\rvert$	$\dfrac{v'(x)}{v(x)}$	J

formule valable lorsque $v \neq 0$ mais on n'a pas besoin de connaître le signe de v.

Ex : calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) dx$.

On cherche une primitive de $x \mapsto \sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$.

On procède par approximations :

$$-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$$

⚠ On dérive ce "candidat" pour voir :

$$-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{\text{dérivée}} 2 \times \sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$$

↳ c'est $u(v(x))$

avec $v(x) = 2x + \frac{\pi}{2}$ $\longrightarrow$ $v'(x)\,u'(v(x))$

$u(y) = -\cos y$

↳ c'est presque bon : on a juste ce facteur 2 dont on ne veut pas.

<u>Conclusion</u> : $-\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ est une primitive qui convient.

D'où :

$$\int_0^{\pi/2} \sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) dx = \left[-\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{\pi/2}$$

2) Intégration par parties.

Th : Soient $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors :

$$\int_a^b \underbrace{u(x)}_{\text{facteur qu'on va dériver}} \underbrace{v'(x)}_{\text{facteur qu'on va primitiver}} dx = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx.$$

C'est l'intégrale qu'on veut calculer (en pratique)

⚠ ici on garde u lui-même, ce n'est pas sa dérivée.

primitive de v'

dérivée de u

primitive de v'

Preuve : $\int_a^b u(x) v'(x)\, dx + \int_a^b u'(x) v(x)\, dx$

$$= \int_a^b \underbrace{u(x) v'(x) + u'(x) v(x)}_{} dx$$

↳ c'est la dérivée de uv donc une primitive est uv

$$= \left[uv\right]_a^b = u(b) v(b) - u(a) v(a).$$

1^er^ cas où c'est utile : quand on intègre un polynôme multiplié par une fonction facile à intégrer.

Ex. de polynômes : $x, x^2, x^3, \ldots$ $2x+1$, $5x^2 - 3x + 2$, ...

$$\int_0^{\pi/2} \underbrace{x}_{u(x)} \ \underbrace{\cos(x)}_{v'(x)} \ dx = \left[x \sin x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1 \times (\sin x) \, dx$$

on va le dériver $u(x)$

on va l'intégrer $v'(x)$ d'où $v(x) = \sin(x)$

$$= \frac{\pi}{2} \times 1 - 0 \times 0 - \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(0 - (-1)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1.$$

NB : On peut aussi trouver ainsi une primitive en calculant

$$\int_0^x t \cos t \, dt$$

avec le même calcul mais des bornes qui sont 0 et x.

↳ au lieu de 0 on peut choisir n'importe quel point fixe.

Autre ex :

$$\int_a^b \underset{\substack{\downarrow \\ \text{on dérive}}}{x} \quad \underset{\substack{\searrow \\ \text{on primitive.}}}{e^x} \, dx$$

$$I_n = \int_a^b \underset{\substack{\downarrow \\ \text{on dérive}}}{\underbrace{x^n}} \quad \underset{\substack{\searrow \\ \text{on primitive}}}{\underbrace{e^x}} \, dx$$

→ permet d'exprimer I_n en fonction de I_{n-1}.

→ récurrence, - - - .

A retenir : (polynôme) × (fonction facile à primitiver)

⇝ IPP en dérivant le polynôme.

2è cas où c'est utile : cas où on a une fonction dont la dérivée est plus agréable qu'elle-même : ln, arctan, arcsin, arccos

⇝ IPP en dérivant cette fonction.

Ex : calculons $\int_1^x \ln(t)\,dt$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Astuce quand on a un seul facteur, dire qu'il est multiplié par 1.

$$\int_1^x \underbrace{1}_{v'(t)} \times \underbrace{\ln(t)}_{u(t)} \, dt = \left[t \ln t\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} t \, dt$$

qu'on va intégrer

qu'on va dériver

$$= x \ln x - \cancel{1 \ln 1} - \int_1^x dt$$

$$= x \ln x - \left[t\right]_1^x$$

$$= x \ln x - x \boxed{+1}$$

dans le Th suivant on cherche juste une primitive donc on peut omettre ce +1.

On a démontré le Th suivant :

Th : Une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est donnée par la fonction

$$x \longmapsto x \ln x - x .$$

Ex : $\int_a^b (\ln x) x^n \, dx$ avec $n \in \mathbb{N}$.

$$\int_a^b \underbrace{(\ln x)}_{\substack{\text{on dérive}\\ \text{c'est } u(x)}} \underbrace{x^n}_{\substack{\text{on primitive}\\ \text{c'est } v'(x)}} dx = \left[(\ln x)\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b - \int_a^b \frac{1}{x}\,\frac{x^{n+1}}{n+1}\,dx$$

$$= (\ln b)\frac{b^{n+1}}{n+1} - (\ln a)\frac{a^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_a^b x^n\,dx$$

$$= (\ln b)\frac{b^{n+1}}{n+1} - (\ln a)\frac{a^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\left(\frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}\right).$$

$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de $x \mapsto x^n$

Ex : calcul de $\int_a^b x^n \exp(x^2)\,dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 1$ on peut trouver une primitive

Car la dérivée de $\exp(x^2)$ est $2x \exp(x^2)$.

Donc $\int_a^b x \exp(x^2) = \left[\frac{1}{2} \exp(x^2) \right]_a^b$ $\boxed{\text{Ok}}$

Pour $n = 0$ il n'y a pas de formule pour une primitive de $x \mapsto \exp(x^2)$.

Pour $n \geq 2$: $\int_a^b x^n \exp(x^2)\,dx$ par IPP :

$$\int_a^b \underbrace{\frac{1}{2} x^{n-1}}_{} \underbrace{2x \exp(x^2)}_{} dx$$

↳ $v'(x)$ ⇝ on le primitive en $v(x) = e^{x^2}$

↳ $u(x)$ ⇝ on le dérive en $\frac{n-1}{2} x^{n-2}$.

Cette IPP permet d'exprimer $\int_a^b x^n e^{x^2} dx$ en fonction de $\int_a^b x^{n-2} e^{x^2} dx$

on se ramène ainsi de n à $n-2$.

De proche en proche :

n impair → on peut calculer $\int_a^b x^n e^{x^2} dx$

n pair → pas de formule générale

aucune primitive de $x^n e^{x^2}$.

3) Une application de l'intégration par parties.

Th : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = 0.$$

Preuve : $\displaystyle\int_a^b \underbrace{f(x)}_{u(x)}\ \underbrace{\sin(nx)}_{v'(x)}\,dx = \left[f(x)\left(\frac{-\cos(nx)}{n}\right)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)\left(\frac{-\cos(nx)}{n}\right)dx$

qu'on dérive — qu'on intègre

$$= \underbrace{\frac{-f(b)\cos(nb)}{n}}_{u_n} + \underbrace{\frac{f(a)\cos(na)}{n}}_{v_n} + \underbrace{\frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos(nx)\,dx}_{w_n}$$

Primitive "approchée" : $-\cos(nx)$

On dérive $-\cos(nx)$: ça donne $-(-\sin(nx))\times n$

$= n\sin(nx)$

donc il faut diviser par n pour obtenir $\sin(nx)$

⚠ on revérifie en dérivant $\dfrac{-\cos(nx)}{n}$ pour être sûr.

$$|u_n| = \frac{|f(b)|}{n} |\cos(nb)| \leq \underbrace{\frac{|f(b)|}{n}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$$

donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$|v_n| = \frac{|f(a)|\,|\cos(na)|}{n} \leq \underbrace{\frac{|f(a)|}{n}}_{\longrightarrow 0}$$

donc $v_n \longrightarrow 0$.

Reste $w_n = \frac{1}{n} \int_a^b f'(x) \cos(nx)\, dx$

f' est continue sur le segment $[a, b]$ donc elle y est bornée : il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in [a, b] \quad m \leq f'(x) \leq M$.

Autre façon de l'écrire :

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in [a, b] \qquad |f'(x)| \leq M.$$

Alors $\quad |f'(x) \cos(nx)| \leq |f'(x)| \leq M$

$$-M \leq f'(x) \cos(nx) \leq M$$ pour tout $x \in [a, b]$

En supposant $a \leq b$ quitte à permuter a et b on a :

$$-M(b-a) \leq \int_a^b f'(x) \cos nx \leq M(b-a)$$

On divise par n :

$$\underbrace{\frac{-M(b-a)}{n}}_{\longrightarrow 0} \leq w_n \leq \underbrace{\frac{M(b-a)}{n}}_{\longrightarrow 0}$$

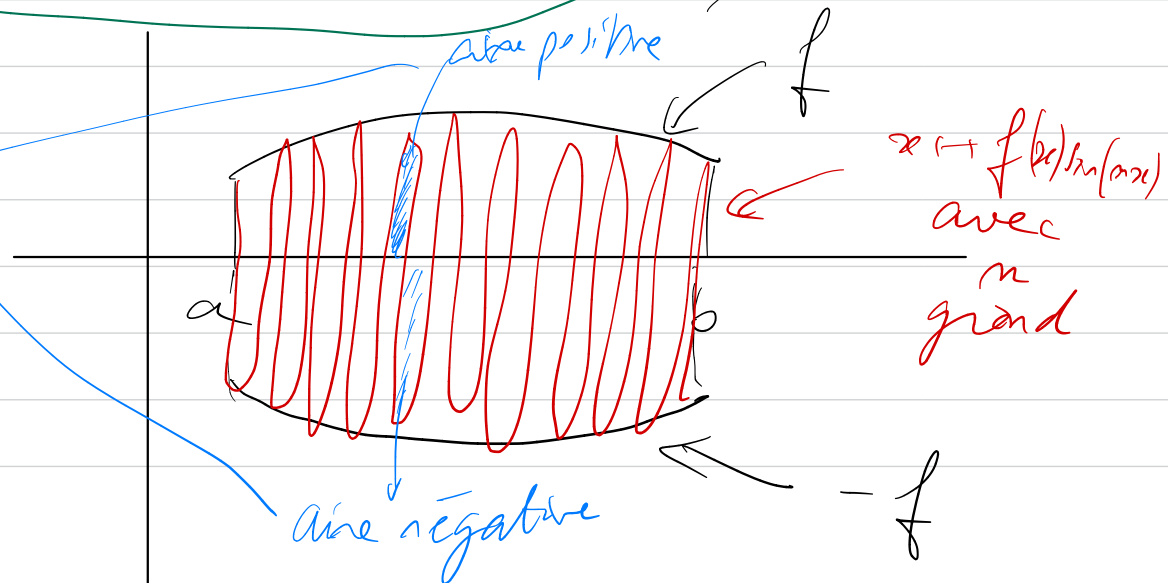
Donc $w_n \longrightarrow 0$ (Th. encadrement).

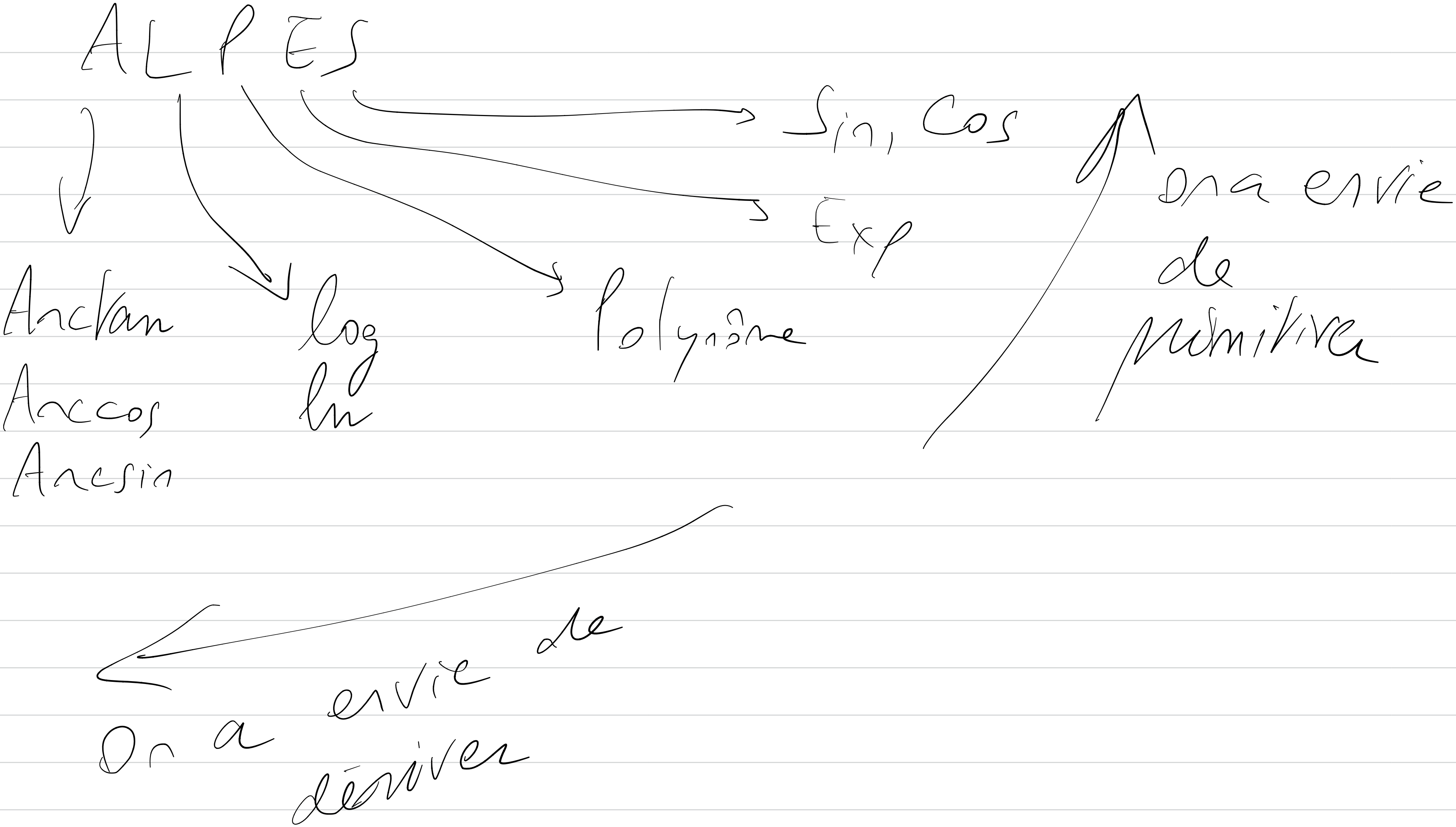
<u>Conclusion</u> $u_n, v_n, w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

---

se compensent

$$\int_a^b f(x) \underbrace{\sin(nx)}_{\text{périodique de période } \frac{2\pi}{n}} dx$$





ALPES

Arctan
Arccos
Arcsin

log
ln

Polynôme

Exp

Sin, Cos

On a envie de primitiver

On a envie de dériver