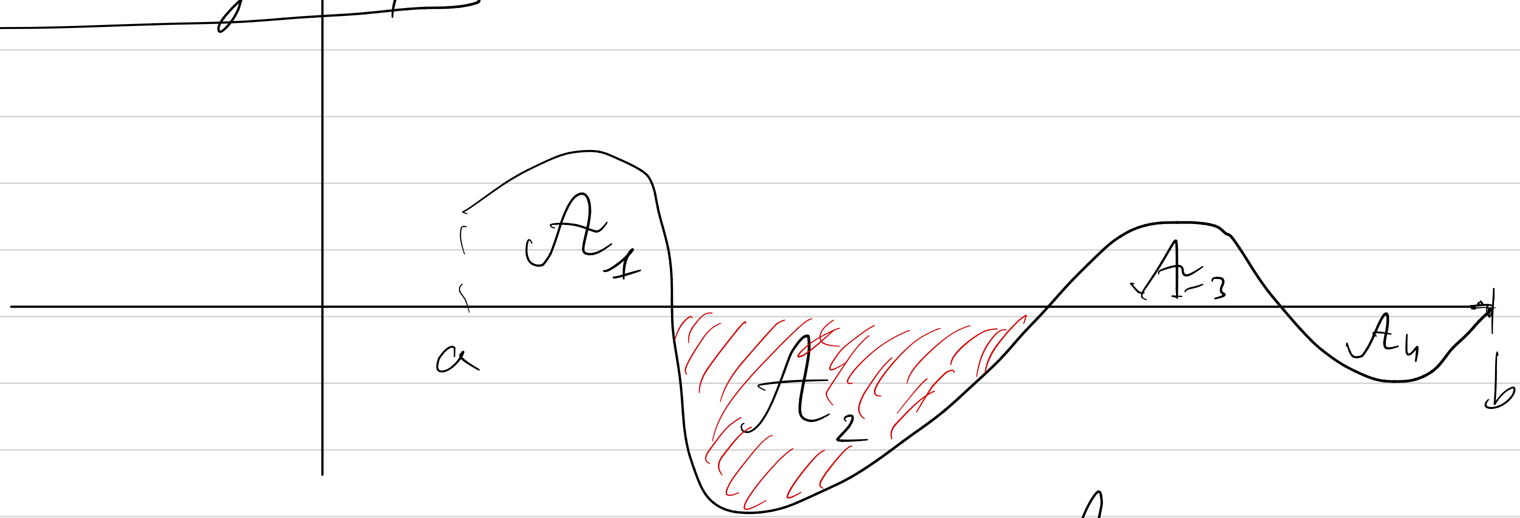
Calcul intégral
L1 DD

Intégrale
(2è partie sur 3)

4è cours
16/2/2021
EM/MSV/iM

I Aires algébriques et inégalité triangulaire

1°) Aires algébriques.



$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

$$\int_a^b f = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_4$$

$\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_4$ aires de domaines compris entre la courbe et l'axe (Ox)

$\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_4 \geq 0$

Les aires entre la courbe et l'axe (Ox) sont comptées négativement lorsque f est négative.

"aire algébrique" = aire munie d'un signe $(\pm)$

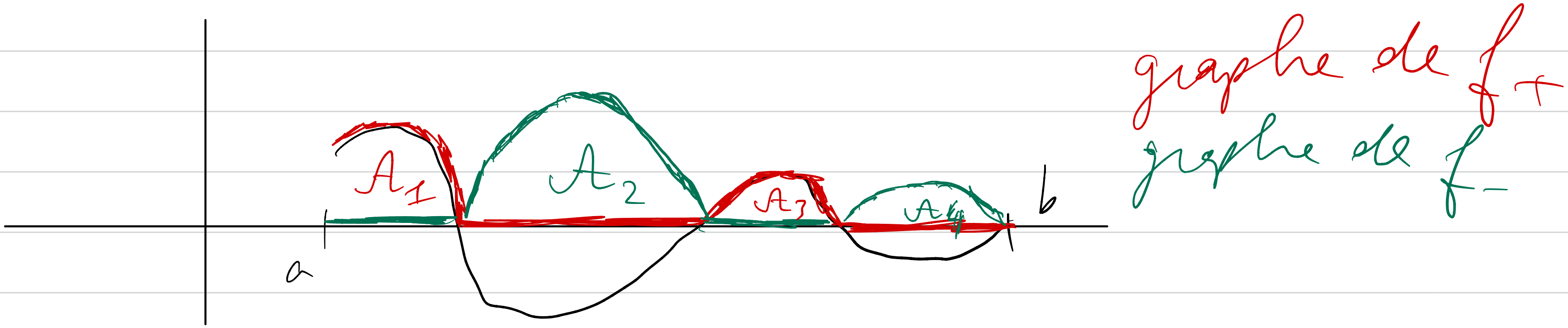
<u>Pour formaliser cela</u> : fixons $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

On note
$$f_+ : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

Autrement dit :
$$\forall x \in [a,b] \quad f_+(x) = \max(0, f(x)).$$

<u>De même</u>
$$f_- : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

i.e. $\forall x \in [a,b] \quad f_-(x) = \max(0, -f(x))$.



<u>Constats</u> :

(i) $\forall x \in [a,b] \quad f(x) = f_+(x) - f_-(x)$

(ii) $\int_a^b f_+ = A_1 + A_3$

(iii) $\int_a^b f_- = A_2 + A_4$

(iv) $\forall x \in [a,b] \quad f_+(x) \geq 0$ et $f_-(x) \geq 0$.

Preuve : (i) Si $f(x) \geq 0$ alors $f_+(x) = f(x)$

$f_-(x) = 0$

donc $f(x) = f(x) - 0$ OK

Si $f(x) < 0$ alors $f_+(x) = 0$

$f_-(x) = -f(x)$

$f(x) = 0 - (-f(x))$ OK

Donc (i) est vraie dans tous les cas.

(ii), (iii) découlent du fait qu'on a l'aire sous la courbe d'une fonction f_+ ou f_- qui est positive (par (iv))

De plus A_2 est symétrique de l'aire notée

A_2 précédemment : l'aire est la même.

2) Inégalité triangulaire.

<u>Th</u> : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue (avec $a \leq b$). Alors :

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

<u>NB</u> : c'est une inégalité analogue à
$\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\quad |x+y| \leq |x| + |y|$
qui s'appelle "inégalité triangulaire"

Preuve : on reprend les notations f_+ et f_- du 1) :

$$\begin{cases} f_+ , f_- \text{ sont positives} \\ \forall x \in [a,b] \quad f(x) = f_+(x) - f_-(x) \end{cases}$$

Alors $$\left| \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b (f_+ - f_-) \right|$$
$$= \left| \int_a^b f_+ - \int_a^b f_- \right| .$$

Par ailleurs $$\int_a^b |f_+| = \int_a^b f_+ + f_-$$

car $\forall x \in [a,b]$ $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$

(se démontre en distinguant selon que $f(x) \geq 0$ ou $f(x) < 0$)

Pour conclure la preuve il suffit de montrer que

$$\left|\int_a^b f_+ - \int_a^b f_-\right| \leq \int_a^b f_+ + \int_a^b f_- .$$

<u>1er cas</u> : $\int_a^b f_+ - \int_a^b f_- \geq 0$. Alors :

$$\left|\int_a^b f_+ - \int_a^b f_-\right| = \int_a^b f_+ - \int_a^b f_- \leq \int_a^b f_+ \quad \text{car } \int_a^b f_- \geq 0$$

$$\leq \int_a^b f_+ + \int_a^b f_- \quad \text{car } \int_a^b f_- \geq 0$$

OK

<u>2è cas</u> : $\int_a^b f_+ - \int_a^b f_- < 0$. Alors :

$$\left|\int_a^b f_+ - \int_a^b f_-\right| = \int_a^b f_- - \int_a^b f_+ \underbrace{\leq \int_a^b f_-}_{\text{car } \int_a^b f_+ \geq 0} \leq \int_a^b f_+ + \int_a^b f_- \quad \text{OK}$$

II Changements de variables.

1) La formule.

Th : Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$

$f : I \to \mathbb{R}$ continue

$\varphi : J \to I$ de classe $\mathcal{C}^1$

$a, b \in J$.

Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$$

Rappels :

- φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur J signifie $\begin{cases} \varphi \text{ dérivable sur } J \\ \varphi' \text{ est continue sur } J \end{cases}$

- $\varphi : J \to I$ signifie $\forall x \in J \quad \varphi(x) \in I$.
  (cela assure que $f(\varphi(x))$ existe pour $x \in J$).

<u>Conseil</u> quand on applique cette formule, changer le nom de la variable muette (par ex : x à gauche, t à droite).

<u>Preuve</u> : Comme f est continue sur I, elle possède une primitive F. Alors $F \circ \varphi : J \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall x \in J \quad (F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\, \varphi'(x) = f(\varphi(x))\, \varphi'(x)$.

On a donc :

$$\int_a^b f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx = [F \circ \varphi]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \quad \text{et :}$$

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, dt = [F]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Les deux intégrales sont bien égales.

Comment retenir la formule ?

$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$$

(*) t correspond à $\varphi(x)$ "on pose $t=\varphi(x)$"

partout où on a $\varphi(x)$ on remplace par t

(si on va de la gauche vers la droite : on part de l'$\int$ en x et on la transforme en celle en t)

Si on va de droite à gauche : on remplace t par $\varphi(x)$.

(*) dt correspond à $\varphi'(x)\,dx$

(mnémotechnique : "$\frac{dt}{dx} = \varphi'(x)$" cohérent avec $t=\varphi(x)$)

⊛ Bornes : quand $x = a$ on a $t = \varphi(a)$
$x = b$ $t = \varphi(b)$

logique puisque $t = \varphi(x)$.

2°) Application "de la gauche vers la droite".

Idée : on doit calculer une intégrale.
On remarque qu'elle est de la forme

$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$$

avec f et φ qu'on détermine.
On applique le CDV (changement de ~~vari~~ variable) $t = \varphi(x)$

et on en déduit qu'elle est égale à

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt$$

<u>Ex</u> : $I = \int_1^3 (\ln x)^7 \frac{dx}{x} = \int_1^3 \varphi(x)^7 \varphi'(x)\,dx$

$$= \int_1^3 f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$$

en posant $\varphi(x) = \ln x$

$f(y) = y^7$

<u>Par CDV</u> : $I = \int_{\varphi(1)}^{\varphi(3)} f(t)\,dt = \int_{\ln(1)}^{\ln 3} t^7\,dt$

$$I = \left[\frac{t^8}{8}\right]_0^{\ln 3} = \frac{(\ln 3)^8}{8}.$$

<u>Ex</u> : $J = \int_{-\pi/6}^{\pi/4} \tan x \, dx = \int_{-\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx$

On pose $\varphi(x) = \cos x$ de telle sorte que

$$\varphi'(x)\, dx = -\sin x \, dx$$

$$J = -\int_{-\pi/6}^{\pi/4} \frac{\varphi'(x)\, dx}{\varphi(x)} = -\int_{-\pi/6}^{\pi/4} f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx$$

en posant $f(y) = \frac{1}{y}$.

$J \neq$

$\varphi : \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right] \longrightarrow \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right] = I$ (on peut prendre aussi $I = \mathbb{R}_+^*$)

φ est de classe C^1 et f est continue

$f : \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$J = -\int_{\cos(-\pi/6)}^{\cos(\pi/4)} f(t)\,dt = -\int_{\sqrt{3}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{t}\,dt$$

$$J = \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dt}{t} = [\ln t]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$J = \left(\frac{1}{2}\ln 3 - \ln 2\right) - \left(\frac{1}{2}\ln 2 - \ln 2\right)$$

$$J = \frac{1}{2}\ln(3/2).$$

Remarque ici φ n'est pas bijective ; ce n'est pas un problème.

Si φ est bijective le CDV $t = \varphi(x)$ peut s'écrire aussi $x = \varphi^{-1}(t)$ ce qui revient à faire le CDV "dans l'autre sens".

A retenir pour les CDV de la gauche vers la droite :

(*) on isole un facteur de la fonction à intégrer : ce facteur joue le rôle de $\varphi'(x)dx$. On doit donc être capable de trouver une primitive de $\varphi'(x)$ pour connaître $\varphi(x)$.

(*) Tout le reste de l'intégrande doit s'exprimer en fonction de $\varphi(x)$ seulement.

(*) Le calcul des nouvelles bornes $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ est facile.

Remarque : parfois on peut aller encore plus vite : plutôt que de faire le CDV de la gauche vers la droite on reconnaît une primitive de $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ sous la forme $F(\varphi(x))$ où F est une primitive de f.

Ex : $I = \int_1^3 (\ln x)^7 \frac{dx}{x}$: une primitive de $x \mapsto \frac{(\ln x)^7}{x}$ est $x \mapsto \frac{1}{8}(\ln x)^8$

d'où $\quad I = \left[\frac{1}{8}(\ln x)^8\right]_1^3 = \frac{(\ln 3)^8}{8}$.

Ex : Une primitive de $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-u'(x)}{u(x)}$

avec $u(x) = \cos x$ est : $-\ln \cos x$ car $\cos x > 0$

d'où $J = \int_{-\pi/6}^{\pi/4} \tan x \, dx = \left[-\ln \cos x\right]_{-\pi/6}^{\pi/4}$ sur $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$

$= -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3) De la droite vers la gauche.

On part d'une intégrale qu'on écrit

sous la forme $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, dt$.

On pose $t = \varphi(x)$ d'où $dt = \varphi'(x)\, dx$

et par CDV notre intégrale est égale à

$\int_a^b f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx$.

$\varphi = \sin$

Ex : $K = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{t^2\, dt}{\sqrt{1-t^2}}$: on pose $t = \sin(x)$

d'où $dt = \cos x\, dx$

On doit écrire les bornes sous la forme : $0 = \sin(a)$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(b)$

On choisit de prendre $\begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{\pi}{4} \end{cases}$ on aurait pu choisir a et b autrement, le calcul aurait donné ~~le~~ même résultat.

$$K = \int_{\sin(0)}^{\sin(\frac{\pi}{4})} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \overset{CDV}{=} \int_0^{\pi/4} \frac{(\sin x)^2}{\sqrt{1-(\sin x)^2}} \cos x \, dx$$

$$K = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x}}\, dx$$ car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Or $\sqrt{\cos^2 x} = |\cos x| = \cos x$ car $\cos x \geq 0$ pour tout $x \in [0, \pi/4]$.

Donc $K = \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \, dx$.

<u>Méthode</u> pour calculer une intégrale

avec des produits ou puissance de cos & sin :

* Soit CDV, règle de Bioche (cf. ci-dessous)

* Soit on <u>linéarise</u> : on transforme des puissances de cos & sin (ou des produits) en combinaisons linéaires de $\cos(kx)$, $\sin(kx)$

<u>Ici</u> : $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$

donc $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$

$$K = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}\, dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

Méthode : quand l'intégrale fait apparaître :

$$\begin{cases} \sqrt{1-t^2} \text{ penser à poser } t = \sin x \\ 1+t^2 \text{ ——— } t = \tan x \end{cases}$$

En effet : $\sqrt{1-t^2}$ est plus simple si $t = \sin x$

Car $\sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x| = \pm \cos x$

selon le signe de $\cos x$

De même si $t = \tan x$ alors $1 + t^2 = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

<u>Astuce</u> : poser $t = \varphi(x)$ quand on pense qu'il y aurait des simplifications si t était de la forme $\varphi(x)$.

<u>Cf</u> : Annexe B du poly sur trigonométrie hyperbolique.

<u>Synthèse sur le CDV de droite à gauche</u> :

* On le fait quand on pense qu'il y

aurait des simplifications si t était de la forme $\varphi(x)$.

* On remplace t par $\varphi(x)$ et dt par $\varphi'(x)dx$.
* On doit <u>résoudre des équations</u> pour trouver les nouvelles bornes. Si on part de $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ on doit <u>chercher</u> a, b tq $\varphi(a) = \alpha$ et $\varphi(b) = \beta$. Parfois il y a plusieurs choix pour a et b : on prend le plus simple.

4) Intégrales de fractions rationnelles en cos et sin.

$\left.\begin{array}{l}\text{Fraction}\\ \text{fonction}\end{array}\right]$ rationnelle = quotient de 2 $\underbrace{\text{polynômes}}_{\sum_{i=0}^{d} a_i x^i \text{ en 1 variable } x}$

ici polynôme en sin et cos : expression de la forme

$$\sum_{i=0}^{d} \sum_{j=0}^{d'} a_{ij} (\cos t)^i (\sin t)^j \quad \text{avec} \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Soit $f(t)$ une telle fonction rationnelle de $\cos t$ et $\sin t$.

On regarde comment se comporte $f(t)\,dt$

quand on remplace t par $-t$, $\pi - t$, $\pi + t$.

Règle de Bioche :

- Si $f(t)\,dt$ est invariant quand on change t en $-t$ alors faire le CDV $x = \cos t$
- Si $f(t)\,dt$ est invariant quand on change t en $\pi - t$ alors faire le CDV $x = \sin t$
- Si $f(t)\,dt$ est invariant quand on change t en $\pi + t$ alors faire le CDV $x = \tan t$

"Invariant quand on change t en $-t$" :

signifie $f(-t)\times(-dt) = f(t)\,dt$

i.e. $-f(-t) = f(t)$ ie f impaire.

Avec $t \to \pi - t$: $f(\pi - t)(-dt) = f(t)\,dt$

ie $f(\pi - t) = -f(t)$.

Avec $t \to \pi + t$: $f(\pi + t)\,dt = f(t)\,dt$

ie $f(\pi + t) = f(t)$.

Ex : $L = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \underbrace{\frac{\sin^3 t}{1+\cos^2 t}\,dt}_{f(t)}$

$$f(-t)\,d(-t) = f(-t)(-dt) = \frac{\sin^3(-t)}{1+\cos^2(-t)}(-dt)$$

$$= \frac{\cancel{(-1)^3}\sin^3(t)}{1+\cos^2 t}\cancel{(-1)}\,dt = f(t)\,dt$$

donc la règle de Bioche suggère de poser $x = \cos t$. D'où $dx = -\sin t\, dt$

On est en train de faire le CDV de la gauche vers la droite. La règle de Bioche suggère que l'intégrale est de la forme

$$\int_a^b f(\cos t)(-\sin t)\,dt$$

ce qui n'était pas évident a priori. C'est bien le cas :

$$L = \int_0^{\pi/4} \frac{(\sin^2 t)(\sin t)}{1+\cos^2 t}\, dt$$

$$L = -\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos^2 t}{1+\cos^2 t}(-\sin t)\, dt$$

On pose $x = \cos t$

$dx = -\sin t \, dx$

$$L = -\int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{1-x^2}{1+x^2}\, dx = \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{1-x^2}{1+x^2}\, dx$$

Astuce : $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \dfrac{2-(1+x^2)}{1+x^2}$ idée faire apparaître $1+x^2$ au lieu de x^2 au numérateur

$= \dfrac{2}{1+x^2} - 1$

D'où $L = 2\displaystyle\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{dx}{1+x^2} - \int_{\sqrt{2}/2}^{1} dx$

$L = 2 \underbrace{\operatorname{Arctan} 1}_{= \pi/4} - 2 \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$L = \dfrac{\pi}{2} - 2 \arctan\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Que faire quand la règle de Bioche ne s'applique pas ? (ie quand $f(t)dt$ n'est inchangé par aucune des 3 transformations ci-dessus).

Th : Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv \pi \, [2\pi]$. On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Alors :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2} \quad \left(\text{si } x \not\equiv \frac{\pi}{2} \bmod \pi\right)$$

Preuve (pour cos) : $\cos x = \cos\left(2 \times \left(\frac{x}{2}\right)\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

Or $1 = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ donc :

$$\cos x = \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)}$$

On divise numérateur & dénominateur par $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Idem pour sin ; tan en découle.

<u>Méthode</u> : si on a une intégrale de fonction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$ pour laquelle la règle de Bioche ne donne rien, faire le CDV $t = \tan(x/2)$.

<u>Ex</u> : $$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1+\tan^2(x/2)}{2\tan(x/2)}\,dx$$

On pose $t = \tan(x/2)$

d'où $dt = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2(x/2)\right)dx$

(Si dt n'était pas apparu spontanément on aurait multiplié et divisé l'intégrande par $\frac{1}{2}\left(1+\tan^2(x/2)\right)$ pour le faire apparaître).

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\tan(\pi/8)}^{\tan(\pi/4)} \frac{\cancel{2}\,dt}{\cancel{2}\,t} = \ln \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \ln \tan(\pi/8)$$

$$= -\ln \tan(\pi/8).$$