Cours n° 5
2/3/2021

Chapitre 2 : intégrales (3/3)

MDD 151
Calcul Intégral
L1 DD
IM/EM/MSV

Le Partiel portera sur les feuilles de TD n° 1 et 2.

I Développement en éléments simples

1) Définitions.

Polynôme : fonction de la forme $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

avec $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Les a_i s'appellent les coefficients du polynôme.

Ex : $P(x) = 5x^3 - 2x + 1 = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3$ $\quad x^0 = 1$

$$= \sum_{k=0}^{3} a_k x^k$$

avec $a_3 = 5$, $a_2 = 0$, $a_1 = -2$, $a_0 = 1$.

Degré d'un polynôme P : c'est la plus grande puissance de x qui intervient avec un coefficient non nul dans l'expression de P.

Précisément : $\underbrace{\deg P}_{\text{notation pour le degré de } P} = d \iff P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ avec $a_d \neq 0$.

Ex : pour $P(x) = 5x^3 - 2x + 1$ on a $\deg P = 3$.

NB : $\deg P = 2 \iff P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

$\exists a, b, c \in \mathbb{R}$ tq $\forall x$

Polynôme nul : défini par $\forall x \quad P(x) = 0$.
Son degré est $-\infty$ (par convention).

Déf : Une fonction rationnelle (ou fraction rationnelle) est une fonction de la forme $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ avec $\begin{cases} P, Q \text{ polynômes} \\ Q \neq 0 \end{cases}$

Ex : $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x + 1}{3x^4 + 2x^2 - 1}$ est une fonction rationnelle.

Question : comment trouver une primitive d'une fonction rationnelle ?

Réponse : On commence par décomposer la fonction rationnelle en éléments simples, puis il est facile d'en trouver une primitive.

Théorie générale de la décomposition en éléments simples : cf. $\underbrace{\text{Annexe}}$ A du poly.

↳ non exigible au partiel et à l'examen

Dans ce cours on se limite à un cas particulier.

2) Développement en éléments simples (dans un cas particulier).

Th : Soient P, Q deux polynômes.

On suppose que Q est de la forme

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{r} (x-\alpha_i) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_r)$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ des réels 2 à 2 distincts.

Alors il existe des réels $A_1, A_2, \ldots, A_r$ et un polynôme $E(x)$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{A_r}{x-\alpha_r}$$

c'est-à-dire $\displaystyle \frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{i=1}^{r} \frac{A_i}{x-\alpha_i}$.

Exemple : $\displaystyle \frac{x^2+5}{x(x-1)} = E(x) + \frac{A_1}{x-0} + \frac{A_2}{x-1}$.

$\rightarrow$ $P(x) = x^2+5$ et $Q(x) = x(x-1) = (x-0)(x-1)$

$\alpha_1 = 0$ $\quad$ $r = 2$

$\alpha_2 = 1$ $\quad$ $\alpha_1 \neq \alpha_2$, OK.

Reste à déterminer $\underbrace{E(x)}_{\text{polynôme}}$ et $\underbrace{A_1, A_2}_{\text{réels}}$;

Th (suite) : Dans le cadre du Th précédent, on a :

(i) $E = 0$ si $\deg(P) < \deg(Q)$

(ii) $\deg E = \deg P - \deg Q$ sinon.

Dans l'exemple : $\deg P = 2$ et $\deg Q = 2$ donc $\deg E = 2 - 2 = 0$.

(de façon générale, si $Q(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$ alors $\deg Q = n$).

NB : Polynôme de degré 0 : fonction constante (non nulle)

Polynôme de degré 1 : $x \mapsto ax + b$ avec $a \neq 0$.

Th (fin) : Dans le Th précédent, le polynôme E et les réels $A_1, \dots, A_r$ sont uniques.

Question pratique : comment déterminer explicitement $E(x)$ et $A_1, \dots, A_r$ si on nous donne P et Q ?

Méthode naïve : on se ramène à résoudre un système linéaire. Exemple :

$$\frac{x^2+5}{x(x-1)} = E(x) + \frac{A_1}{x-0} + \frac{A_2}{x-1}$$

avec $\deg E = 0$ donc $E(x) = a_0$ polynôme constant avec $a_0 \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

La méthode naïve consiste à partir du développement (i.e. du membre de droite), à tout mettre au même dénominateur et à identifier avec le membre de gauche. Cela conduit à un système linéaire dont les inconnues sont $A_1, A_2, \ldots, A_r$ et les coefficients de E. On résout ce système.

$$E(x) + \frac{A_1}{x-0} + \frac{A_2}{x-1} = a_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1}$$

$$= \frac{a\,x\,(x-1) + A_1(x-1) + A_2\,x}{x(x-1)}$$

$$= \frac{ax^2 - ax + A_1 x - A_1 + A_2 x}{x(x-1)}$$

$$= \frac{ax^2 + (A_1 + A_2 - a)x - A_1}{x(x-1)}.$$

$x(x-1)$ → c'est $Q(x)$

Ceci est $= \frac{P(x)}{Q(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \quad \underbrace{a}\, x^2 + \underbrace{(A_1 + A_2 - a)}\, x - A_1 = \underbrace{P(x)}$$

$= x^2 + 5$

1 $+0x$

<u>Identification</u> : cette relation est vraie pour une infinité de valeurs de x si et seulement si les coefficients sont les

mêmes dans les 2 membres :

$$\begin{cases} a = 1 \\ A_1 + A_2 - a = 0 \\ -A_1 = 5 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ coefficients de x^2

$\longrightarrow$ coefficients de x

$\longrightarrow$ coefficients constants ($=$ coeff. de $x^0 = 1$)

On résout :

$$\begin{cases} a = 1 \\ A_2 = a - A_1 = 1 + 5 = 6 \\ A_1 = -5 \end{cases}$$

<u>Conclusion</u> : $\dfrac{x^2+5}{x(x-1)} = 1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{6}{x-1}$.

<u>Méthode plus efficace</u> : on <u>sait</u> qu'il existe

$a_0, A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{x^2+5}{x(x-1)} = a_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} \quad (*)$$

On multiplie $(*)$ par x :

$$\frac{x^2+5}{x-1} = a_0 x + A_1 + \frac{A_2 x}{x-1}.$$

Puis on évalue en $x=0$:

$$-5 = \frac{5}{-1} = a_0 0 + A_1 + \frac{A_2 \times 0}{0-1} = A_1 \quad \text{i.e. } \boxed{A_1 = -5}$$

<u>Pour trouver A_2</u> on multiplie $(*)$ par $(x-1)$ d'où:

$$\frac{x^2+5}{x} = a_0(x-1) + \frac{A_1(x-1)}{x} + A_2$$

puis on prend $x = 1$: on obtient $\boxed{A_2 = 6}$

Pour trouver a_0 on fait tendre x vers $+\infty$ dans ⊛

$$\frac{x^2+5}{x(x-1)} = \frac{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}{x \times x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

donc par passage à la limite : $\boxed{a_0 = 1.}$

NB : Si on sait faire une division euclidienne : $E(x)$ est le quotient dans la division de P par Q.

3) Exemples qui ne rentrent pas dans le cas particulier du 2)

On s'interdit des dénominateurs $Q(x)$ comme :

(i) $Q(x) = x^2+1$ (ne se factorise pas sous la forme $\prod_{i=1}^{2}(x-\alpha_i)$ avec α_i réels)

(ii) $Q(x) = (x-3)^2 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ avec $\alpha_1 = \alpha_2$

NB : Pour trouver les coeff de E lorsque $\deg E \geq 1$:

⊛ on peut diviser ⊛ par $x^{\deg E}$ puis faire tendre x vers $+\infty$, cela donne le coefficient de $x^{\deg E}$ dans $E(x)$.

⊛ on peut évaluer ⊛ en quelques valeurs de x (par exemple $x = 0, 1, 2, \ldots$) ce qui donne un système linéaire qu'on résout (après avoir calculé $A_1, \dots, A_r$).

II Sommes de Riemann.

1) Le Théorème.

Th : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors :

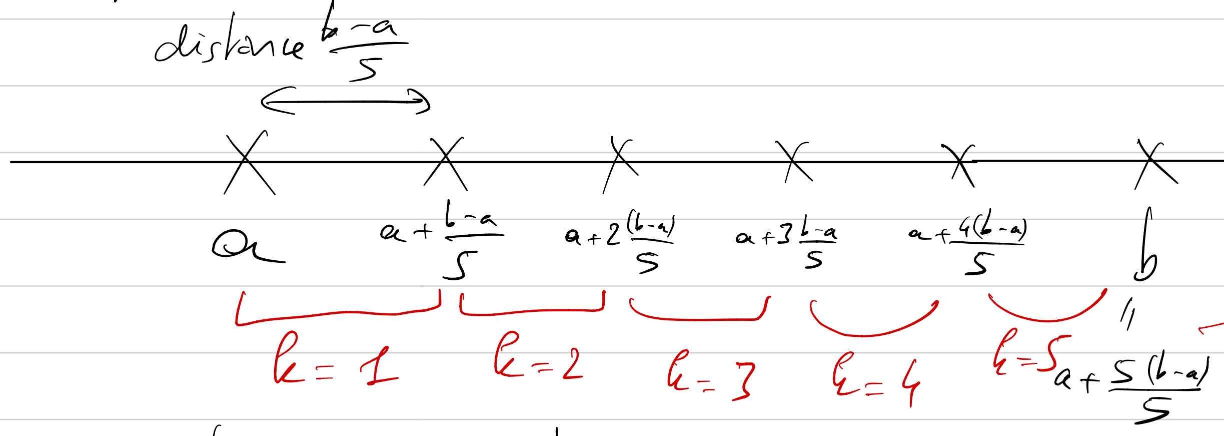
$$\underbrace{\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)}_{\text{ceci s'appelle une Somme de Riemann.}} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Méthode des rectangles pour calculer une valeur approchée de $\int_a^b f$:

⊛ On découpe $[a,b]$ en n intervalles de même longueur : $\frac{b-a}{n}$

on imagine que n est grand

ici $n=5$



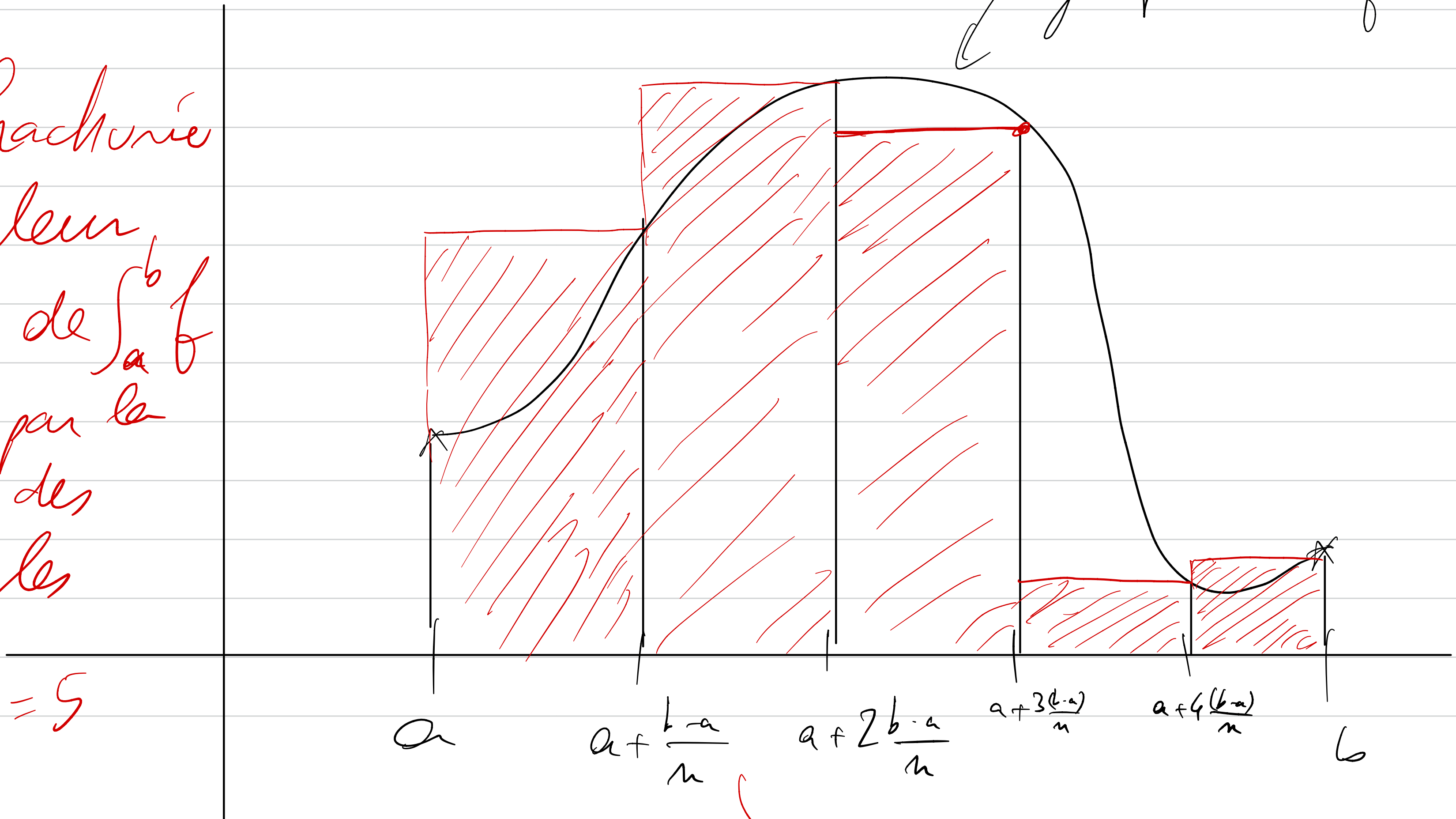
⊛ Chasles : $\int_a^b f = \int_a^{a+\frac{b-a}{5}} f + \int_{a+\frac{b-a}{5}}^{a+2\frac{b-a}{5}} f + \dots\dots$

⊛ Sur chaque intervalle $\left[a+(k-1)\frac{b-a}{5} ; a+k\frac{b-a}{5}\right]$ avec $1 \leq k \leq 5$ on dit que f est "presque constante", approchée par $f\left(a+k\frac{b-a}{5}\right)$.

(légitime si au lieu de 5 on utilise un entier n très grand : l'intervalle $\left[a+(k-1)\frac{b-a}{n} ; a+\frac{k(b-a)}{n}\right]$ est très petit "donc" f ne varie presque pas sur cet intervalle).

graphe de f

L'aire hachurée est la valeur approchée de $\int_a^b f$ obtenue par la méthode des rectangles avec $n=5$



$\underbrace{\text{sur cet}}$ ici $f(x) \simeq f\left(a + 2\frac{b-a}{n}\right)$

intervalle on dit que

$f(x) \simeq f\left(a + \frac{b-a}{n}\right)$

Entre $a + (k-1)\frac{b-a}{n}$ et $a + k\frac{b-a}{n}$ on approche l'intégrale de f par un rectangle de côtés $\frac{b-a}{n}$ et $f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$. Autrement dit :

$$\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} f \simeq \frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right)$$

Par somme pour k allant à 1 à n :

$$\int_a^b f \approx \underbrace{\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)}_{\text{c'est la somme de Riemann.}}$$

$\approx$ Symbole qui signifie "à peu près égal pour n grand"

↳ PAS DE SIGNIFICATION PRÉCISE

Th : $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f.$

Cas particulier le plus utile : $[a, b] = [0, 1]$:

__Corollaire__ Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f.$$

__Interprétation__ : moyenne des valeurs prises par f aux points $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}$.

2) Application des sommes de Riemann.

__Ex__ : notons $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}$. On cherche $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Pour se ramener à une somme de Riemann on factorise par n au maximum pour ne plus avoir de k dans la somme mais seulement des k/n :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n \times \frac{k}{n}}{n^2\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1\right)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k/n}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1}$$

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$ en posant :

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$ (on remplace les $\frac{k}{n}$ par x dans la formule)

On a bien $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ donc par le Th :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

NB : Si au lieu de considérer la somme de Riemann $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right) = S_n$

on considère

$$\tilde{S}_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

(i.e. la somme s'arrête à $n-1$ au lieu de n)

alors on a encore $\lim_{n\to+\infty} \tilde{S}_n = \int_a^b f$.

<u>Preuve</u> : $\tilde{S}_n = S_n - \frac{b-a}{n} f\left(a + n\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$

$$= \underbrace{S_n}_{\substack{\longrightarrow \int_a^b f \\ \text{par le Th}}} - \underbrace{\frac{b-a}{n} f(b)}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ n \to +\infty}}$$

donc $\tilde{S}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f$.

<u>NB</u> : de même dans la définition de S_n la somme sur k peut commencer à 0 ou à 2 etc...

⚠ $\sum_{k=\frac{n}{4}}^{n}$ aurait un comportement différent : il faut commencer à une valeur indépendante de n.

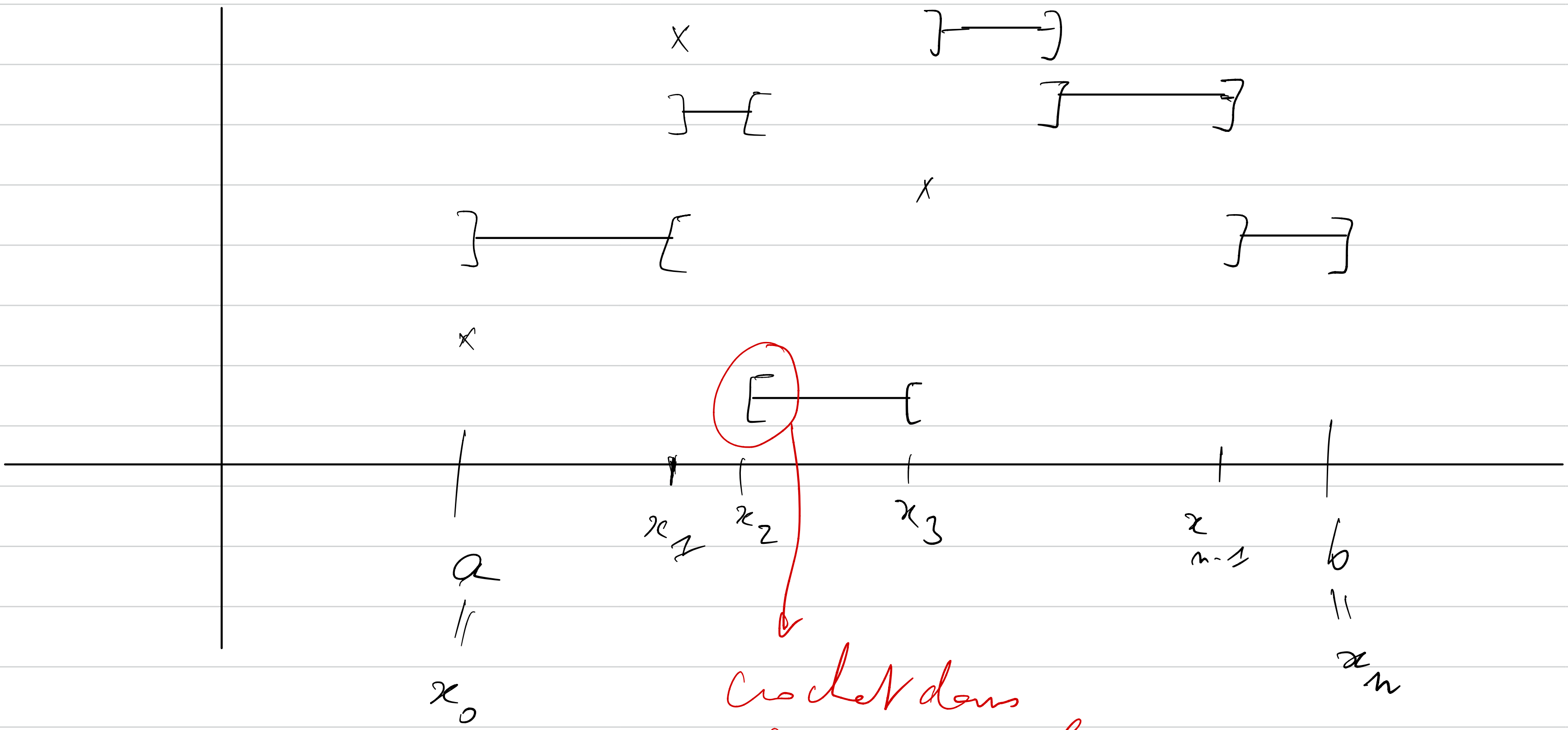
Presque toujours : $\sum_{k=0 \text{ ou } 1}^{n-1 \text{ ou } n}$

III. Construction de l'intégrale de Riemann.

But : démontrer le Th admis au début du cours : si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f possède des primitives sur $[a,b]$.

1) Fonction en escalier.

Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite en escalier si son graphe est de la forme suivante :



crochet dans ce sens signifie

$f(x_2) = f(x_2 + \varepsilon)$

avec $\varepsilon > 0$ très petit

On a $\underbrace{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b}$

↳ les x_i s'appellent une subdivision de $[a,b]$

tel que $\underbrace{\forall i \in [\![1,n]\!] \quad f \text{ est constante sur }]x_{i-1}, x_i[}$.

↳ on dit que la subdivision est adaptée à f

Déf : Si f est en escalier (avec une subdivision $x_0 < \dots < x_n$ comme ci-dessus adaptée à f) alors on pose : [ici n et $x_0, \dots, x_n$ dépendent de f]

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \, f\Big(\underbrace{\frac{x_i + x_{i-1}}{2}}\Big)$$

↳ ce point $\in]x_{i-1}, x_i[$

2) Fonction Riemann-intégrables.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée, i.e. tq $\exists m, M$ vérifiant $\forall x \in [a,b]$ $\quad m \leq f(x) \leq M$.

Notons $I_-(f) = \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx \text{ avec } \varphi : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ en escalier telle que } \forall x \in [a,b] \ \varphi(x) \leq f(x) \right\}$

⊛ $I_-(f) \neq \emptyset$ car la fonction constante $\varphi(x) = m$ est en escalier sur $[a,b]$ et $\forall x \in [a,b]$ $\varphi(x) \leq f(x)$.

⊛ Soit φ en escalier tq $\forall x \in [a,b]$ $\varphi(x) \leq f(x)$.
Comme $f(x) \leq M$ on a $\varphi(x) \leq M$ donc $\int_a^b \varphi \leq M(b-a)$
donc l'ensemble $I_-(f)$ est majoré.

<u>Conclusion</u> : $I_-(f)$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$: elle possède une borne sup.

On aimerait poser $\int_a^b f = \sup I_-(f)$.

Déf analogue : $\underline{I}_+(f) = \left\{ \int_a^b \varphi \text{ avec } \varphi : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ en escalier tq } \forall x \in [a,b] \ \varphi(x) \geq f(x) \right\}$

On aimerait poser $\int_a^b f = \underbrace{\inf \underline{I}_+(f)}_{\text{existe (comme ci-dessus)}}$.

Déf : f est dite Riemann-intégrable sur $[a,b]$ (ou intégrable au sens de Riemann) si elle est bornée sur $[a,b]$ et si

$$\sup \underline{I}_-(f) = \inf \underline{I}_+(f).$$

Def : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann intégrable.

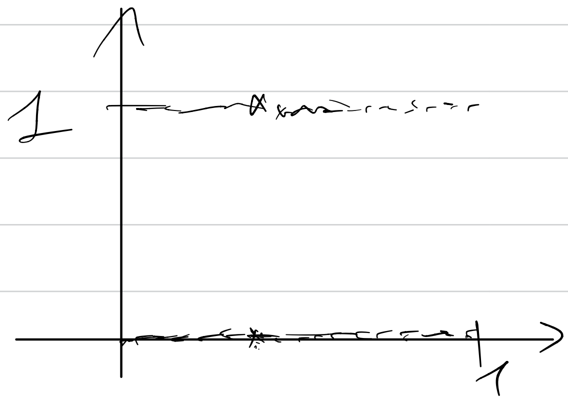
On pose $\int_a^b f = \sup I_-(f) = \inf I_+(f)$.

3) Une fonction qui n'est pas intégrable.

Notons $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f(x) = 1 \iff \exists p \in \mathbb{Z} \quad \exists q \in \mathbb{N}^* \text{ tq } x = \frac{p}{q}.$$



Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier tq
$\forall x \in [a,b] \quad \varphi(x) \leq f(x)$.

Dès qu'on prend un petit intervalle sur lequel φ est constante, on peut trouver $x \notin \mathbb{Q}$ dans cet intervalle, d'où $\varphi(x) \leq f(x) = 0$.
Donc $\varphi \leq 0$ sur chaque intervalle sur lequel elle est constante.

Conclusion : $\int_a^b \varphi \leq 0$

Gra : $\sup I_-(f) = 0$ (sup atteint en prenant φ identiquement nulle)

De même $\inf I_+(f) = 1$ (inf atteint en prenant φ constante $= 1$)

car si φ est en escalier et $\varphi(x) \geq f(x)$ pour tout $x \in [0,1]$

alors $\varphi \geq 1$ sur tout intervalle où elle est constante.

On a donc démontré que f n'est pas Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

<u>En fait</u> dans $\mathbb{R}$ il y a "très peu" de rationnels donc f est "presque toujours" nulle : on aurait envie de dire que

f est intégrable et $\int_0^1 f = 0$. La théorie de l'intégrale de Lebesgue permet de faire cela (cf. en L3).

4) Fonctions continues

<u>Th</u> : Si f est continue sur $[a,b]$ alors f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Il suffit que f soit $\underbrace{\text{continue par morceaux}}$.

↳ <u>cf Poly §2.11</u>

Si f est continue par morceaux alors f est Riemann intégrable.

Il existe des fonctions compliquées qui sont Riemann-intégrables sans être continues par morceaux.

NB : $\int_a^a f = 0$ dans tous les cas.

On a supposé $a < b$ dans ce qui précède.

Cf : "Les contre-exemples en mathématiques" de Bertrand Hauchecorne.

NB : le III (= § 2.9 du poly) sur la construction de l'intégrale de Riemann ($I_+(f)$, $I_-(f)$, —) n'est pas au programme pour le partiel et l'examen.