6ᵉ cours
9/3/2021

Chapitre 3

Formules de Taylor (1/2)

Calcul Intégral
MDD 151
IM/EM/MSV

Programme du partiel : [chapitres 1 et 2
[feuilles de TD 1 et 2

Ne sont pas au programme :

* la construction de l'$\int$ de Riemann (fonctions Riemann-intégrables) [à l'examen non plus]
* les sommes de Riemann [mais ce sera au programme de l'examen]

Sur e-campus : * corrigés des TD 1 & 2

* Partiel d'entraînement

I Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral.

1) Énoncé et remarques.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Th [Taylor avec reste intégral] [ici à l'ordre n]

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I.

Soit $a, b \in I$. Alors :

à l'ordre n : on va jusqu'à $f^{(n)}(a)$ dans le polynôme de Taylor.

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}_{\text{s'appelle le POLYNOME DE TAYLOR DE } f \text{ en } a \text{ à l'ordre } n.} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Rappel : $\begin{cases} n! = n(n-1)\cdots\times 3\times 2\times 1 \;; & 2! = 2,\quad 1! = 1,\quad 0! = 1. \\ n! = \prod_{k=1}^{n} k \;; & \text{pour } n=0 \text{ c'est un produit vide} \end{cases}$

donc il vaut 1 par convention.

NB : le polynôme de Taylor de f en a à l'ordre n est un polynôme en la variable b : on imagine que a est fixé et que b varie (on pourrait poser $x = b$). Il est de degré $\leq n$.

Idée du Th : on approche $f(b)$ par ce polynôme

de Taylor, le dernier terme $\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$.
est souvent considéré comme
un terme d'erreur.

Cas particulier $n=0$: le Th s'écrit alors :

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\, dt$$

C'est le Th fondamental de l'analyse.

Cas particulier : quand f est un polynôme et qu'on choisit $n \geq \deg f$. Alors $f^{(n+1)}(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En effet on peut écrire $f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ puisque $\deg f \leq n$

avec $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Quand on dérive $t \mapsto t^k$ on obtient $k t^{k-1}$.

——— 2 fois ——— $k(k-1)t^{k-2}$

——— 3 fois ——— $k(k-1)(k-2)t^{k-3}$

——— j fois (avec $1 \leq j \leq k$) ——— $k(k-1)\ldots(k-j+1)\,t^{k-j}$

——— k fois ——— $k(k-1)\ldots 1\, t^0 = k!$ (polynôme constant)

——— $(k+1)$ fois ——— le polynôme nul.

A retenir :
$$\left(\frac{d}{dt}\right)^j (t^k) = \begin{cases} k(k-1)\ldots(k-j+1)\,t^{k-j} & \text{si } 0 \leq j \leq k \\ 0 & \text{si } j > k \end{cases}$$

Pour $f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, pour tout $j \geq n+1$

on a $\left(\frac{d}{dt}\right)^j f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\right)^j t^k}_{\text{ici } j \geq n+1 > k} = 0$

Le Th donne donc :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \underbrace{\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt}_{=0 \text{ car on intègre la fonction nulle.}}$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k} \quad \boxed{\text{pour } f \text{ polynôme de degré} \leq n}$$

C'est la formule de Taylor pour les polynômes.

Avec $a=0$: $\quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

Or on a vu que $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Donc par identification :

$$\boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}}$$

on retrouve le $k^{\text{ième}}$ coeff du polynôme f (i.e. celui de x^k) en dérivant f k fois, en évaluant en 0 puis en divisant par $k!$.

2) Démonstration.

Récurrence. Initialisation : $n=0$, déjà vu. Hérédité :

Soit $n \geq 1$. On suppose le Th vrai à l'ordre $n-1$.
Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, et $a, b \in \mathbb{R}$.
Alors f est de classe $\mathcal{C}^n = \mathcal{C}^{(n-1)+1}$ donc on peut appliquer le Th à l'ordre $n-1$ (par hyp. de récurrence). On a donc :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \underbrace{\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt}.$$

Intégrons par parties :

$$\int_a^b \underbrace{\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}}_{\text{on l'intègre}} \underbrace{f^{(n)}(t)}_{\text{on le dérive}}\,dt = \left[\underbrace{-\frac{(b-t)^n}{n!}} f^{(n)}(t)\right]_a^b - \int_a^b -\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

(OK car f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$)

$t \mapsto -\frac{(b-t)^n}{n!}$ est une primitive de $t \mapsto \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}$

$$= 0 + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

On remplace dans l'expression de $f(b)$ et on obtient :

$$f(b) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)}_{= \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Ceci termine la récurrence.

3) Corollaire.

<u>Corollaire</u> : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, et $a, b \in I$. Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (b-a)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+s(b-a))\, ds.$$

Intérêt principal : dans le Th on ne sait pas si $a > b$ ou $a < b$ (le Th s'applique dans les deux cas). Le reste intégral $\int_a^b \cdots$ est donc parfois une intégrale "avec les bornes dans le mauvais sens" (i.e. $a > b$) : c'est désagréable si on veut encadrer cette intégrale. Utiliser le Corollaire résout ce désagrément car on a une $\int_0^1$ avec $0 < 1$.

Preuve : changement de variable $t = a + s(b-a)$

$$\left.\begin{array}{lll} t = a & \text{correspond à} & s = 0 \\ t = b & \text{———} & s = 1 \end{array}\right\} \quad dt = (b-a)\,ds$$

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \int_0^1 \frac{\boxed{(b-a-s(b-a))^n}}{n!} f^{(n+1)}(a+s(b-a))(b-a)\,ds$$

Ceci $= ((b-a)(1-s))^n$

$$= (b-a)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+s(b-a))\,ds.$$

Cela termine la preuve du corollaire.

4) Applications

1ère application : démontrer une inégalité sur un intervalle entre une fonction et un polynôme

Prop : Pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ on a $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

Preuve : on applique le corollaire à $f = \cos$ sur $I = \mathbb{R}$ à l'ordre $n = 2$ (car la prop fait apparaître le polynôme

$1-\frac{x^2}{2}$ qui est de degré 2), avec $a =$ (à choisir) et $b = x$

(on se donne $x \in [-\pi, \pi]$ puis on applique le Corollaire).

$$\cos x = \cos(a) + (x-a)\cos'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}\cos''(a)$$

$$+ (x-a)^3 \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2!} \cos'''(a+s(x-a))\, ds$$

Avec $a = 0$: on a $\cos'(0) = -\sin(0) = 0$ et $\cos''(0) = -\cos(0) = -1$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \underbrace{x^3 \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} \sin(sx)\, ds}_{\text{reste à montrer que ceci est } \geq 0}$$

reste à montrer que ceci est ≥ 0.

(car $\cos' = -\sin$, $\cos'' = -\cos$, $\cos''' = \sin$)

<u>1er cas</u> : $x \in [0, \pi]$. Alors $x^3 \geq 0$ et

$$\forall s \in [0,1] \qquad sx \in [0, \pi]$$

$$\forall s \in [0,1] \qquad \sin(sx) \geq 0$$

La fonction $s \longmapsto \frac{(1-s)^2}{2} \sin(sx)$ est positive sur $[0,1]$ et $0 < 1$ donc son $\int_0^1$ est ≥ 0.

Donc $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

<u>2e cas</u> : $x \in [-\pi, 0[$. Alors $x^3 \leq 0$ et $\forall s \in [0,1]$ $sx \in [-\pi, 0]$ donc la fonction $s \longmapsto \frac{(1-s)^2}{2} \sin(sx)$ est négative sur $[0,1]$. Donc $\int_0^1 \dots \leq 0$ d'où $x^3 \int_0^1 \dots \geq 0$

Donc $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ dans ce cas aussi.

Ceci termine la preuve.

Prop : Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

l'erreur est ≥ 0 : c'est une approximation par défaut

$$0 \leq \underbrace{e^x}_{\text{fonction}} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}_{\text{qu'on approche par un polynôme}} \leq \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x}_{\text{majorant de l'erreur}}.$$

Corollaire (voir plus loin si $x \leq 0$) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Preuve du Corollaire : Th d'encadrement car $\lim_{n \to +\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

Preuve de la Prop : Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On applique le Th de Taylor avec reste intégral à l'ordre n à la fonction $f = \exp$ sur $I = \mathbb{R}$, avec $a = 0$ et $b = x$:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \exp^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \exp^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Or $\exp' = \exp$ donc $\forall j \in \mathbb{N}$ $\exp^{(j)} = \exp$ d'où $\exp^{(j)}(0) = 1$:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,dt.$$

Reste à montrer que $0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,dt \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x.$

c'est faux si x est négatif et n pair.

Rappel : on a $x > 0$. Alors les bornes de l'$\int$ sont "dans le bon sens", et $\forall t \in [0, x]$ $\frac{(x-t)^n}{n!} e^t \geq 0$

donc $0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\,dt.$

Par ailleurs : $\forall t \in [0, x]$ $e^t \leq e^x$

$\forall t \in [0, x] \qquad \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \leq \frac{(x-t)^n}{n!} e^x$

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt \leq e^x \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \, dt$$

$$= e^x \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x$$

$$= e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

II Inégalité de Taylor-Lagrange

Th : Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Soit $a, b \in I$.

Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [a,b] \quad |f^{(n+1)}(x)| \leq M$.

Alors :

M ne doit pas dépendre de ce x

M peut dépendre de f, a, b.

comprendre $[b, a]$ si $b < a$.

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

<u>NB</u> : $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a,b]$
donc un tel M existe toujours.

<u>Preuve</u> : on applique le Corollaire de Taylor avec reste $\int$.

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| = \left| (b-a)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+s(b-a))\,ds \right|$$

$$\leq |b-a|^{n+1} \int_0^1 \Bigg| \underbrace{\frac{(1-s)^n}{n!}}_{\geq 0} f^{(n+1)}\big(\underbrace{a+s(b-a)}_{\in [a,b]}\big) \Bigg|\, ds$$

$$\leq |b-a|^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{n!} M\, ds$$

$$= |b-a|^{n+1}\left[-\frac{(1-s)^{n+1}}{(n+1)!}M\right]_0^1$$

$$= |b-a|^{n+1}\frac{M}{(n+1)!}$$ ce qui termine la preuve.

<u>$1^{è}$ application</u> : $\left|e^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

<u>Corollaire</u> Pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = e^x$.

Soit $x\in\mathbb{R}$.

<u>Preuve de cette application</u> : $f=\exp$, $b=x$, $a=0$, M tel que pour tout t compris entre 0 et x on ait

$$\left|\exp^{(n+1)}(t)\right| = \left|e^t\right| \leq M.$$

Alors $M = e^{|x|}$ convient : $\begin{cases}\text{OK si } x\geq 0\\ \text{si } x<0, \text{ alors } t\leq 0 \text{ donc } |e^t|\leq 1\leq e^{|x|}.\end{cases}$

L'inégalité de Taylor - Lagrange donne :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-0)^k}{k!} \exp^{(k)}(0) \right| \leq M \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Application n°2 : Montrons que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} \right) \right| \leq \frac{|x|^5}{120}.$$

<u>Preuve</u> : Soit $x \in \mathbb{R}$. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à $f = \sin$ avec $n = 4$, $a = 0$, $b = x$ et M tel que pour tout t compris entre 0 et x on ait $\left|\sin^{(V)}(t)\right| \leq M$.
(ici M peut dépendre de x mais pas de t)

On $\sin' = \cos$, $\sin'' = -\sin$, $\sin''' = -\cos$, $\sin^{(IV)} = \sin$, $\sin^{(V)} = \cos$.

En prenant $M = 1$ on a bien

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \left|\sin^{(V)}(t)\right| = |\cos t| \leq M.$$

L'inégalité de Taylor-Lagrange s'écrit :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\left| \sin x - \sum_{k=0}^{4} \frac{x^k}{k!} \sin^{(k)}(0) \right| \leq 1 \times \frac{|x|^5}{5!}$$

$$\left| \sin x - x - \frac{x^3}{3!}(-1) \right| \leq \frac{|x|^5}{5!}$$

$$\left| \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \right| \leq \frac{|x|^5}{120}$$ ce qui termine la preuve

III Remarque sur la parité des fonctions.

Prop : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors :

(i) Si f est paire alors f' est impaire.

(ii) Si f est impaire alors f' est paire.

Preuve : (i) Comme f est paire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(-x) = f(x).$$

On dérive les deux membres (puisque f est dérivable) :

$$-f'(-x) = f'(x)$$

$$f'(-x) = -f'(x) \quad : \quad \underline{f' \text{ impaire}}$$

(ii) Analogue : $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(-x) = -f(x)$

On dérive :

$$-f'(-x) = -f'(x)$$

$$f'(-x) = f'(x) \quad : \quad \underline{f' \text{ paire}}.$$

Corollaire Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Alors :

(i) Si f est paire alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} f^{(n)} \text{ est paire si } n \text{ pair} \\ f^{(n)} \text{ est impaire si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

On dit que $f^{(n)}$ a la parité de n.

(ii) Si f est impaire alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} f^{(n)} \text{ est impaire si } n \text{ est pair} \\ f^{(n)} \text{ est paire si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

On dit que $f^{(n)}$ a la parité opposée à celle de n.

<u>Preuve</u> : immédiat par récurrence.

Corollaire : $\begin{cases} \sin^{(n)} \text{ est impaire pour } n \text{ pair} \\ \sin^{(n)} \text{ est paire pour } n \text{ impair.} \end{cases}$

Corollaire : $\forall j \in \mathbb{N} \quad \sin^{(2j)}(0) = 0.$

↳ **Preuve :** la valeur en 0 de la fonction impaire $\sin^{(2j)}$ est nulle.

Intérêt : si on applique une formule de Taylor à la fonction sinus avec $a = 0$ et $b = x$, le polynôme de Taylor sera

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \sin^{(k)}(0)$$

avec $\sin^{(k)}(0) = 0$ pour tout k pair donc il restera seulement :

$$\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \frac{x^k}{k!} \sin^{(k)}(0).$$

C'est le même phénomène si au ~~lieu~~ lieu de sin on utilise une autre fonction impaire (tan, arcsin, arctan, ...)

Avec une fonction paire f il resterait $\displaystyle\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$.