# Chapitre 3
# Formules de Taylor (2/2)



## IV. Formule de Taylor-Young.

**Th** (Taylor-Young) : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle $I$, avec $n \in \mathbb{N}$. Soit $a \in I$. Alors il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ et :

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}_{\text{"partie polynomiale" comme dans les autres Th de Taylor}} + \underbrace{(x-a)^n \varepsilon(x)}_{\text{nouvelle expression du reste on va le noter } o((x-a)^n)}$$

NB : l'existence de $\varepsilon$ vérifiant $f(x) = \ldots$ est triviale :
$$\begin{cases} \varepsilon(x) = \dfrac{1}{(x-a)^n}\left(f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right) & \text{pour } x \neq a \\ \varepsilon(a) = 0 \end{cases}$$

le point important est : $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$. Autrement dit, l'important est que le reste $(x-a)^n \varepsilon(x)$ est beaucoup plus petit que $(x-a)^n$ quand $x$ tend vers $a$.

⚠ la formule de Taylor-Young est <u>asymptotique</u> : elle n'a d'intérêt <u>que quand $x$ tend vers $a$</u> (alors que les 2 autres Th de Taylor sont valables pour $a$ et $b$ fixés, sur un intervalle).

<u>Preuve</u> : on pose $\varepsilon(a)=0$ et $\varepsilon(x) = \frac{1}{(x-a)^n}\left(f(x) - \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(x-a)^\ell}{\ell!} f^{(\ell)}(a)\right)$ pour $x \neq a$.

<u>But</u> : montrer que $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

Cas facile : si $f$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $I$ on peut noter $M = \sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f^{(n+1)}(x)|$ avec $\alpha < a < \beta$ et $\alpha, \beta \in I$ (en supposant pour simplifier que $a$ n'est pas une extrémité de l'intervalle $I$). On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$|\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{|x-a|^n} \times M \times \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M \cdot |x-a|}{(n+1)!}$$ qui tend vers 0 quand $x \to a$.

Donc $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Cas général ⊛ <u>Si $n=0$</u> : $f(x) = f(a) + \varepsilon(x)$ en posant $\varepsilon(x) = f(x) - f(a)$ ; comme $f$ est continue en $a$ on a : $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.

(3)

(*) Soit $n \geq 1$. Montrons qu'on peut supposer $f^{(n)}(a) = 0$. Autrement dit, montrons que si le théorème est vrai sous l'hypothèse supplémentaire $f^{(n)}(a) = 0$, alors il est vrai en général (i.e. sans cette hypothèse).

Supposons le Th vrai si $f^{(n)}(a) = 0$. Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$. On pose : $g(x) = f(x) - \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$. Alors $g$ est aussi de classe $\mathcal{C}^n$,

et $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^n}$

↳ c'est la fonction constante $= n!$

$\forall x \in I \quad g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)$.

Notamment $g^{(n)}(a) = 0$. Donc (par hypothèse) le Th de Taylor-Young est vrai pour $g$ : il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} g^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$. Or on a $g^{(n)}(a) = 0$ et : $\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad g^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ car la dérivée $k$-ième de $x \mapsto (x-a)^n$ est $x \mapsto n(n-1)\dots(n-k+1)(x-a)^{n-k}$ qui s'annule en $a$ puisque $k \leq n-1$.

D'où : $$f(x) - \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) = g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x).$$

C'est exactement ce qu'on voulait obtenir : le Th est vrai pour $f$.

Fin de la preuve du Th : montrons le Th pour $n \geq 1$ si $f^{(n)}(a) = 0$.

Posons encore $\varepsilon(a) = 0$ et $\varepsilon(x) = \frac{1}{(x-a)^n}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right)$

On applique le Th de Taylor avec reste intégral ↳ ici on peut arrêter la somme à $n-1$ car $f^{(n)}(a) = 0$.

à l'ordre $n-1$ :

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{(x-a)^n} \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt.$$

Soit $\alpha > 0$. Comme $f^{(n)}$ est continue en $a$, et $f^{(n)}(a) = 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in I, \quad |t-a| < \eta \implies |f^{(n)}(t)| < \alpha.$$

Soit $x \in I$ tel que $|x-a| < \eta$ (c'est-à-dire $a - \eta < x < a + \eta$). Alors on peut majorer :

$$|\varepsilon(x)| = \frac{1}{|x-a|^n} \left| \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt \right| \leq \frac{1}{|x-a|^n} \left| \int_a^x \frac{|x-t|^{n-1}}{(n-1)!} \underbrace{|f^{(n)}(t)|}_{\leq \alpha} dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{|x-a|^n} \times \frac{1}{(n-1)!} \times \alpha \underbrace{\left| \int_a^x |x-t|^{n-1} dt \right|}_{= \frac{|x-a|^n}{n}}$$

$$\leq \frac{\alpha}{n!}$$

Bilan : $\forall \alpha > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I, \quad |x-a| < \eta \implies |\varepsilon(x)| \leq \frac{\alpha}{n!}$. Donc $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Ceci termine la preuve.

# V La notation $o$ (de Landau)

<u>Déf</u> : Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f, g : I \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$, ou $x_0$ une borne de $I$.

On note $f(x) = o(g(x))$ quand $x \to x_0$, ou : $f(x) = \underset{x \to x_0}{o}(g(x))$,

et on dit que $f(x)$ est [un petit $o$ de $g(x)$] quand $x$ tend vers $x_0$,

négligeable devant $g(x)$

si il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} f(x) = \varepsilon(x)\, g(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0. \end{cases}$

<u>Intuitivement</u> : cela signifie que $f(x)$ est beaucoup plus petite que $g(x)$ quand $x$ tend vers $x_0$.

<u>Traduction</u> : si $g(x)$ ne s'annule pas au voisinage de $x_0$ (sauf peut-être en $x_0$) (i.e. si il existe $\alpha > 0$ tel que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in \,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\, \cap I$ tel que $x \neq x_0$), alors :

$$\boxed{f(x) = o(g(x)) \text{ quand } x \to x_0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.}$$

← à retenir

c'est presque la définition de $o$ (en pratique)

<u>NB</u> : ici on autorise $x_0$ à valoir $\pm\infty$. $\boxed{\text{⚠ cette notion est asymptotique}}$

Exemples : quand $x \to +\infty$ :

$x = o(x^2)$ car $\dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

$x^2 = o(x^5)$ car $\dfrac{x^2}{x^5} = \dfrac{1}{x^3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ } on a 2 fonctions qui $\to +\infty$ à des vitesses différentes

$\dfrac{1}{x} = o(1)$ car $\dfrac{1/x}{1} = \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

$\dfrac{1}{x} = o(x)$ car $\dfrac{1/x}{x} = \dfrac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

$\dfrac{1}{x^2} = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ car $\dfrac{1/x^2}{1/x} = \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ } ici les 2 fonctions tendent vers $0$ à des vitesses différentes

$x^a = o(x^b)$ pour $a < b$ car $\dfrac{x^a}{x^b} = \dfrac{1}{x^{b-a}} \longrightarrow 0$ car $b-a>0$ (ici $a,b \in \mathbb{R}$)

$\ln x = o(\sqrt{x})$ car $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

$x^2 = o(3^x)$ car $\dfrac{x^2}{3^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

$(\ln x)^\alpha = o(x^\beta)$ pour $\alpha, \beta > 0$

$x^\beta = o(\gamma^x)$ pour $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma > 1$

} croissances comparées.

---

Quand $x \to 0$ :

$x^2 = o(x)$ car $\dfrac{x^2}{x} = x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$x^5 = o(x^2)$

$x = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ car $\dfrac{x}{1/x} = x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$\dfrac{1}{x} = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ car $\dfrac{1/x}{1/x^2} = \dfrac{x^2}{x} = x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Quand $x \to 0$ : $x^a = o(x^b)$ pour $a > b$ car $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ car $a - b > 0$.

↳ c'est l'inverse de la situation où $x \to +\infty$

$x^\alpha \ln x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ pour $\alpha > 0$, donc : $\ln(x) = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ pour $\alpha > 0$ quand $x \to 0^+$.

(par ex : $\ln x = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$).

---

Propriété : $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(1) \iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

↳ ≃ évident à partir de la traduction page 5

Intérêt de cette notation $o(g(x))$ : on s'autorise à écrire des expressions dans lesquelles on remplace un terme par $o(g(x))$ pour dire que ce terme est $= o(g(x))$.

Exemple : $\sin x = x + o(x^2)$ signifie qu'il existe une fonction $f(x)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \sin x = x + f(x) \\ f(x) = o(x^2) \end{cases}$$

(dans cet exemple $x$ tend vers 0).

⚠ $\lim\limits_{x \to 0} \sin x$ est un réel (qui vaut 0)

Intérêt : la notation $o(..)$ est très maniable.

**Th** (Taylor-Young) : Soit $f$ $\mathcal{C}^n$ sur $I$, et $a \in I$. Alors quand $x \to a$ on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o\left((x-a)^n\right).$$

**Ex** : $I = \mathbb{R}$, $a = 0$, $n = 2$, $f(x) = \sin x$ : alors $f(0) = 0$, $f'(0) = \cos 0 = 1$, $f''(0) = -\sin(0) = 0$

donc $\sin x = 0 + \frac{x^1}{1!} \times 1 + 0 + o(x^2)$ i.e. : $\sin x = x + o(x^2)$ quand $x \to 0$.

**Propriétés de la notation $o$** : ici $x \to x_0$ avec $x_0$ fixé (réel ou $= \pm\infty$) :

⊛ si $f_1(x) = o(g(x))$ et $f_2(x) = o(g(x))$ alors

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = o(g(x)) \\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda f_1(x) = o(g(x)) \\ \forall \mu \in \mathbb{R}^* \quad f_1(x) = o(\mu\, g(x)) \end{cases}$$

⊛ si $f_1(x) = o(f_2(x))$ et $f_2(x) = o(f_3(x))$

alors $f_1(x) = o(f_3(x))$.

**Preuve** : ⊛ si $\frac{f_1(x)}{g(x)} \to 0$ et $\frac{f_2(x)}{g(x)} \to 0$ alors $\frac{f_1(x) + f_2(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g(x)} + \frac{f_2(x)}{g(x)} \to 0$.

⊛ on a : $\frac{f_1(x)}{f_3(x)} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \times \frac{f_2(x)}{f_3(x)} \to 0$ par produit de 2 fonctions qui tendent vers 0.

Autre propriété : produit membre à membre : si $f_1(x) = o(g_1(x))$ et $f_2(x) = o(g_2(x))$ alors $f_1(x) f_2(x) = o(g_1(x) g_2(x))$.

En pratique : 
$$o(5x^2) = o(x^2)$$
$$o(x^2)\, o(x^3) = o(x^2 \cdot x^3) = o(x^5)$$
$$o(x^3) + o(x^3) = o(x^3)$$
$$5\, o(x^2) = o(x^2)$$

Exemple d'application : par Taylor-Young à l'ordre 5 on obtient quand $x \to 0$ :
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \quad \text{et} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5).$$

Notons $f(x) = \dfrac{x \cos x - \sin x}{x^3} = \dfrac{x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)}{x^3}$

$$f(x) = \frac{1}{x^3}\left(\cancel{x} - \frac{x^3}{2} + \underbrace{\frac{x^5}{24}}_{=o(x^3)} + \underbrace{x\, o(x^5)}_{=o(x^3)} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} - \underbrace{\frac{x^5}{120}}_{=o(x^3)} - \underbrace{o(x^5)}_{=o(x^3)}\right)$$

(on pourrait dire mieux)

$$f(x) = \frac{1}{x^3}\left( x^3 \underbrace{\left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{6}\right)}_{=-1/3} + \underbrace{o(x^3) + o(x^3) + o(x^3) + o(x^3)}_{=o(x^3)} \right)$$

$$f(x) = \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{3} + \underbrace{\frac{o(x^3)}{x^3}}$$

$$= \frac{1}{x^3}\, o(x^3) = o\left(\frac{1}{x^3} \times x^3\right) = o(1)$$

$$f(x) = \frac{-1}{3} + o(1)$$

<u>Propriété</u> :

$$\boxed{f(x)\, o(g(x)) = o\left(f(x)g(x)\right)}$$

Autrement dit : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{-1}{3}$.

<u>Propriété</u> : Soit $\ell$ un <u>réel</u>. Alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff f(x) = \ell + \underset{x \to x_0}{o}(1).$$

<u>A retenir</u> : $\underset{x \to x_0}{o}(1)$ désigne n'importe quelle fonction de $x$ qui tend vers $0$ quand $x \to x_0$.

# VI Notation $\sim$ : équivalents.

Déf : Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f, g : I \to \mathbb{R}$, et $x_0 \in I$ (ou $x_0$ borne de $I$, éventuellement $x_0 = \pm\infty$). On note $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ et on dit que $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ quand $x$ tend vers $x_0$ s'il existe $\eta : I \to \mathbb{R}$ tq : $\begin{cases} f(x) = \eta(x)\, g(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} \eta(x) = 1. \end{cases}$

En pratique cela signifie : $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1}$.

↳ i.e. si $g$ ne s'annule pas sur un intervalle de la forme $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[ \cap I$, sauf peut-être en $x_0$.

Intuitivement cela signifie que $f(x)$ et $g(x)$ "ont la même taille" quand $x \to x_0$.

Ex : quand $x \to +\infty$, $\quad x^3 + 2x + 1 \sim x^3$ car $\dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^3} = 1 + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

Propriété : quand $x \to x_0$ :

$$f(x) \sim g(x) \iff f(x) = g(x) + o(g(x))$$
$$\iff f(x) = g(x) + o(f(x)).$$

Ex : Soit $P(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré $d$, avec $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}$ et $a_d \neq 0$. Alors quand $x \to +\infty$ on a $P(x) \sim a_d x^d$ car $a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0 = o(x^d) = o(a_d x^d)$.

<u>Intérêt</u> : quand on a une fonction compliquée (comme ici $P(x)$), on essaye souvent de lui trouver un équivalent "simple".

<u>Propriété</u> : Si $f_1(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g_1(x)$ alors : $\forall a \in \mathbb{R} \quad f_1(x)^a \sim g_1(x)^a$. Notamment : (sous réserve que ces expressions aient un sens)

<u>$a = -1$</u> : $\dfrac{1}{f_1(x)} \sim \dfrac{1}{g_1(x)}$

<u>$a = 2$</u> : $f_1(x)^2 \sim g_1(x)^2$

<u>$a = 1/2$</u> : $\sqrt{f_1(x)} \sim \sqrt{g_1(x)}$

<u>Preuve</u> : si $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} = 1$ alors $\dfrac{f_1(x)^a}{g_1(x)^a} = \left(\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}\right)^a \xrightarrow[x\to x_0]{} 1$.

<u>Propriété</u> : Si $f_1(x) \sim g_1(x)$ et $f_2(x) \sim g_2(x)$ alors $f_1(x)f_2(x) \sim g_1(x)g_2(x)$

et $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}$ (toujours quand $x \to x_0$)

<u>Prop</u> : (i) Si $f_1(x) \sim f_2(x)$ alors $f_2(x) \sim f_1(x)$.

(ii) ~~[illegible]~~ On a toujours $f_1(x) \sim f_1(x)$.

(iii) Si $f_1(x) \sim f_2(x)$ et $f_2(x) \sim f_3(x)$ alors $f_1(x) \sim f_3(x)$.

**Lien avec o** : si $f(x) = o(g(x))$ et $g(x) \sim g_1(x)$

alors $f(x) = o(g_1(x))$.

**Prop**: Pour $l$ un réel **non nul** : $\quad f(x) \sim l \iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

**Ex** : $f(x) = \dfrac{\sin x - x}{x(1-\cos x)}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

(i) On a $\sin x = \underbrace{\cancel{x + o(x^2)}}_{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$ (cf. plus haut) donc $\sin x - x = -\dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$

$$= -\frac{x^3}{6} + o\left(\frac{-x^3}{6}\right)$$

$$\sim -\frac{x^3}{6}.$$

(ii) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

donc $1 - \cos x = \dfrac{x^2}{2} - o(x^2) = \dfrac{x^2}{2} + o\left(\dfrac{x^2}{2}\right) \sim \dfrac{x^2}{2}$.

(iii) finalement $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ donc $x(1-\cos x) \sim x \cdot \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{x^3}{2}$ ; en outre $\sin x - x \sim \dfrac{-x^3}{6}$

donc $f(x) \sim \dfrac{-x^3/6}{x^3/2} = \dfrac{-1/6}{1/2} = -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3}$ qui est un réel (non nul) ;

donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{-1}{3}$.