8ᵉ cours
30/3/2021

Chapitre 4
Développements Limités (1/3)

Calcul Intégral
MDD 151
IM/EM/MSV

I Définition, exemples. 1) Définition

Fixons un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Déf : On appelle développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction f toute écriture de la forme :

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}_{\text{polynôme } P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i} + \underset{x\to 0}{o}(x^n) \quad \text{avec } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Le polynôme P s'appelle la partie principale du développement limité ; $o(x^n)$ est le terme d'erreur.

⚠ à l'ordre n signifie que le terme d'erreur est $o(x^n)$.

NB : ici le D.L. est en 0, c'est-à-dire que x tend vers 0.

Idée : approcher $f(x)$ par un polynôme de degré $\leq n$ avec une erreur petite quand $x \to 0$.

Ex : $f(x) = x - x^2 + \underbrace{x^3 - x^3 \ln x}_{\text{c'est un } o(x^2)}$

donc $f(x) = x - x^2 + o(x^2)$ est un DL à l'ordre 2.

Ex : $\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ avec $x \in I =]-1,1[$

$= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + \underbrace{\frac{x^{n+1}}{1-x}}_{= o(x^n) \text{ quand } x \to 0}$

donc ceci est un DL à l'ordre n.

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle ouvert contenant 0 alors le Th de Taylor-Young donne un DL à l'ordre n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

2) Unicité et conséquences.

Prop : La fonction f possède au plus un DL à l'ordre n en 0 : si on en a deux $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + o(x^n) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i + o(x^n)$

alors ils sont égaux : $\forall i \in [\![0, n]\!] \quad a_i = b_i$.

C'est l'unicité du DL à l'ordre n de f en 0.

$\rightsquigarrow$ On peut dire "le" DL.

Preuve : supposons $\exists i \in [\![0,n]\!]$ $a_i \neq b_i$ et notons i_0 le plus petit tel i.

On a :

$$0 = f(x) - f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j + o(x^n) - \sum_{j=0}^{n} b_j x^j - o(x^n)$$

$$0 = \sum_{j=0}^{n} \underbrace{(a_j - b_j)}_{\substack{= 0 \text{ pour } j < i_0 \\ \neq 0 \text{ pour } j = i_0}} x^j + o(x^n)$$

$$0 = (a_{i_0} - b_{i_0}) x^{i_0} + \sum_{j=i_0+1}^{n} (a_j - b_j) x^j + o(x^n)$$

On divise par x^{i_0} :

$$0 = a_{i_0} - b_{i_0} + \underbrace{\sum_{j=i_0+1}^{n} (a_j - b_j) x^{j-i_0}}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 0} + \underbrace{o\left(x^{n-i_0}\right)}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 0}$$

car $i_0 \leq n$
$n - i_0 \geq 0$

Le membre de droite tend vers $a_{i_0} - b_{i_0} \neq 0$ quand $x \to 0$: contradiction.

Prop (troncature) : Si $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ est le DL de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $l \leq n$ f possède un DL à l'ordre l en 0 qui est : $f(x) = \sum_{k=0}^{l} a_k x^k + o(x^l)$.

Troncature : $a_0 + a_1 x + \dots + a_l x^l + \underbrace{a_{l+1} x^{l+1} + \dots + a_n x^n}$

on tronque cette partie (= on la supprime) pour obtenir le DL à l'ordre l.

Prop (parité) : Si f est paire (resp. impaire) alors le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ qui est la partie principale de son DL à l'ordre n est aussi pair (resp. impair) c'est-à-dire que toutes les puissances de x qui apparaissent avec un coeff $\neq 0$ sont paires (resp. impaires).

Ex : on verra que [ou Taylor-Young donne] : $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ ⑥

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$

Preuve : Notons $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ le DL à l'ordre n de f en 0.

Alors $f(-x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (-x)^k + o((-x)^n) = \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k x^k + o(x^n)$

Si f paire alors $f(x) = f(-x)$ possède 2 DL à l'ordre n en 0 :

$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ et $\sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k x^k + o(x^n)$.

Par unicité : $\forall k \in [\![0, n]\!]$ $a_k = a_k (-1)^k$. Pour k impair

cela implique $a_k = -a_k$ d'où $a_k = 0$.

Si f impaire c'est analogue car $f(x) = -f(-x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^{k+1} x^k + o(x^n)$.

3) Lien avec la dérivabilité.

Prop : f possède un DL à l'ordre $n=0$ en 0 $\Longleftrightarrow$ f possède une limite finie en 0

Et si c'est le cas alors $f(x) = a_0 + o(1)$ avec $a_0 = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Preuve : $f(x) = a_0 + o(1) \iff f(x) - a_0 = o(1)$

$\iff \lim\limits_{x\to 0} f(x) - a_0 = 0$

$\iff \lim\limits_{x\to 0} f(x) = a_0$.

NB : Dans un DL à l'ordre n on a toujours $a_0 = f(0)$.

Prop : f possède un DL à l'ordre $n=1$ en 0 $\iff$ f est dérivable en 0.

Et si c'est le cas alors $f(x) = a_0 + a_1 x + o(x)$ avec $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(0)$.

Autrement dit, $f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$.

Preuve : Nécessairement f est continue en 0 et $a_0 = f(0)$.

$$f(x) = f(0) + a_1 x + o(x) \iff f(x) - f(0) = a_1 x + o(x)$$

$$\iff \underbrace{\frac{f(x) - f(0)}{x}}_{\text{taux d'accroissement de } f \text{ en } 0.} = a_1 + o(1)$$

ici on a des fonctions définies au voisinage de 0 mais pas forcément en 0 (sur $]0, \varepsilon[$ ou $]-\varepsilon, 0[$ avec $\varepsilon > 0$)

Il existe un tel a_1 si et seulement si $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ possède une limite finie quand $x \to 0$ si et seulement si f est dérivable en 0. Si c'est le cas, on a : $a_1 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$.

NB : Si on a un DL de f en 0 à l'ordre n avec $n \geq 1$ alors $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(0)$.

NB : f $\mathcal{C}^n$ près de 0 $\xrightarrow{\text{T. Young}}$ $\exists$ DL d'ordre n ; est-ce une équivalence ? Non !

Ex : $f(x) = 1 + x^3 + x^4 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) = 1 + x^3 + o(x^3)$ possède un DL à l'ordre 3 mais

$$f'(x) = \underbrace{3x^2 + 4x^3 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} + \underbrace{x^4 \times (-3x^{-4}) \cos\left(\frac{1}{x^3}\right)}_{= -3\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)}$$

$-3\cos\left(\frac{1}{x^3}\right)$ n'a pas de limite quand $x \to 0$

donc $f'(x)$ n'a pas de limite quand $x \to 0$

donc f' n'est pas continue en 0

donc f' n'est pas dérivable en 0

donc $f''(0)$ n'existe pas :

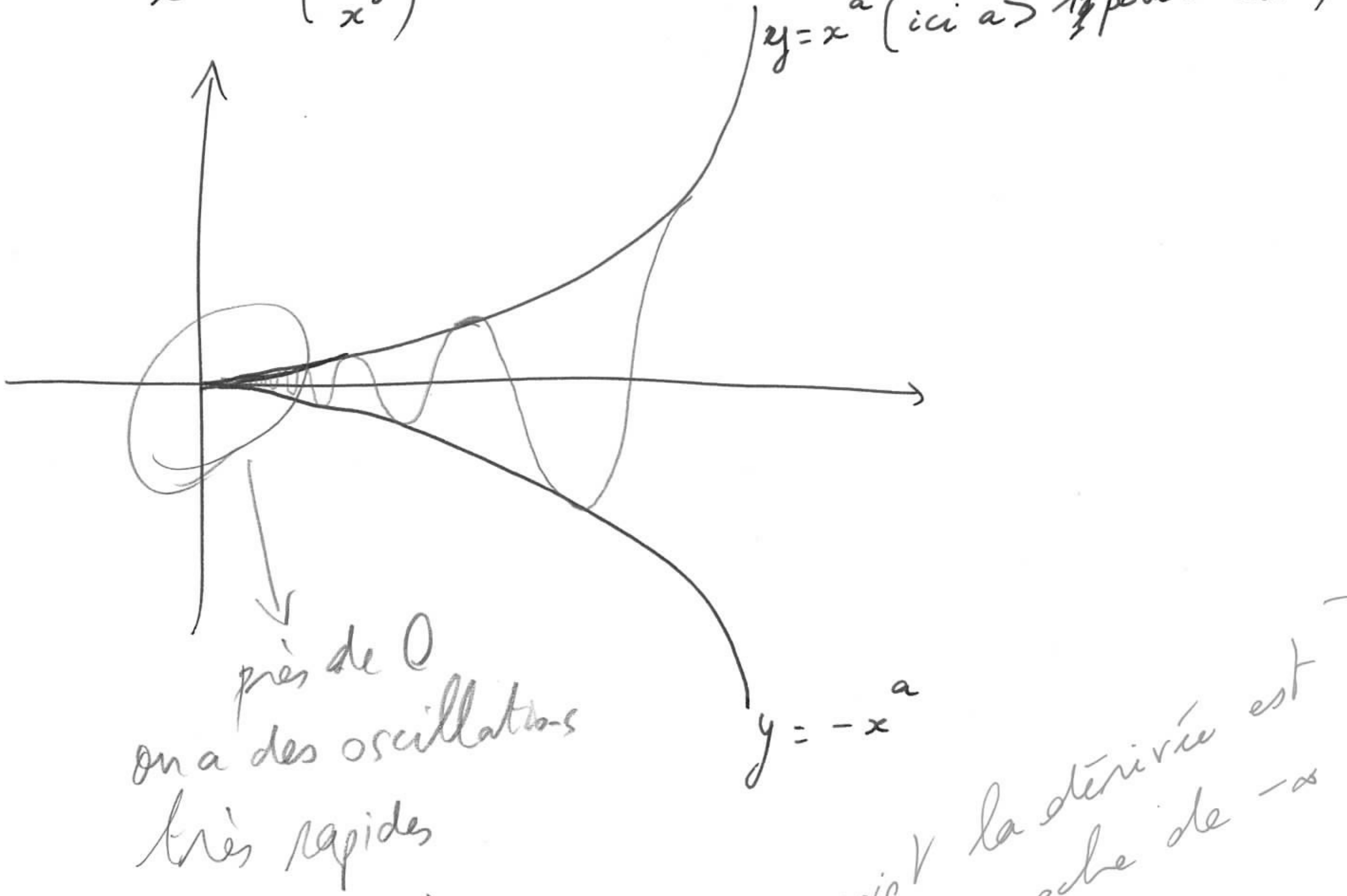
avoir un DL à l'ordre 3 n'implique pas d'être dérivable 2 fois en 0

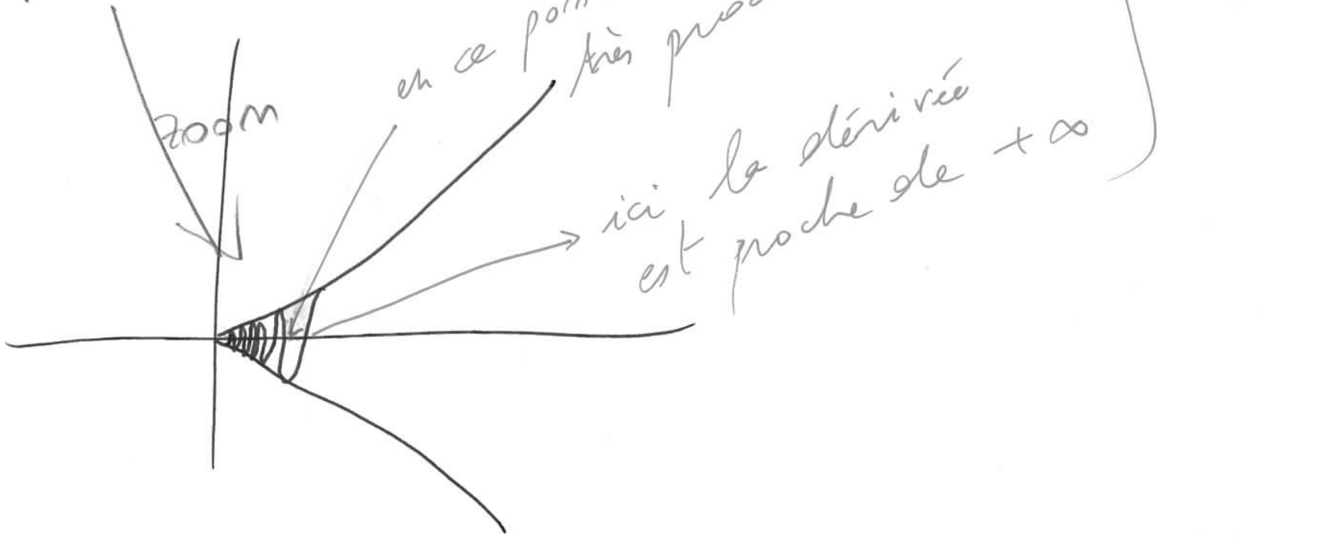
NB : implicitement on a prolongé f par continuité en posant $f(0) = 1$.

$f'(0)$ existe et vaut 0 car $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{x^3 + x^4 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)}{x} = x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

f n'est $\mathcal{C}^1$ sur aucun intervalle ouvert contenant 0.

NB : graphe de $x \longmapsto x^a \sin\left(\frac{1}{x^b}\right)$ avec $a, b > 0$:





4) D.L. à connaître. Ils découlent de Taylor-Young :

[Preuve directe page 2]

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

d'où $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n).$$

<u>Moyen mnémotechnique</u> : cas particulier où $\alpha \in \mathbb{N}$: on a $\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$: cf. binôme de Newton.

(si $n = \alpha \in \mathbb{N}$: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k 1^{n-k}$)