Complément : le binôme de Newton.

I Coefficients binomiaux.

On pose $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$ pour $0 \leq k \leq n$.

Pour $k, n \in \mathbb{Z}$, on pose $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$.

NB : $\binom{n}{k}$ est le nombre de façons de choisir k objets parmi n.

C'est le nombre de parties de cardinal k d'un ensemble donné de cardinal n.

Valeurs à connaître :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad (\text{Rappel : } 0! = 1)$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

<u>Prop</u> : $\forall k \in [\![0, n]\!]$ $\quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

<u>Preuve par la def</u> : $\binom{n}{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$.

<u>Preuve combinatoire</u> : choisir k objets parmi n, cela revient à choisir les $n-k$ objets qu'on laisse de côté.

<u>Formule de Pascal</u> : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

<u>Preuve combinatoire</u> : notons $E = [\![1, n]\!]$. Cherchons à dénombrer les parties $A \subset E$ de cardinal k. Il y en a deux sortes :

- Celles qui ne contiennent pas l'entier n (i.e. tq $n \notin A$). Ce sont des parties de $[\![1, n-1]\!]$ à k éléments : il y en a $\binom{n-1}{k}$.
- Celles telles que $n \in A$. Connaître A revient alors à connaître $A \setminus \{n\}$ qui est une partie de $[\![1, n-1]\!]$ de cardinal $k-1$: il y en a $\binom{n-1}{k-1}$.

Triangle de Pascal :

1

1 1

1 2 1

ligne $n=3$ $\longrightarrow$ 1 3 3 1 $= \binom{3}{2}$

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 . 6

1 7 . . . 7

$\binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{k}$

1 8 - - - - $\binom{n}{k}$ . . . 1

sur la ligne n on met de gauche à droite :

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \cdots \quad \binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

II Théorème / Formule du binôme de Newton.

__Th__ : Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{n}{0} b^n + \binom{n}{1} a b^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b + \binom{n}{n} a^n$$

$$= b^n + n a b^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a^2 b^{n-2} + \dots + n a^{n-1} b + a^n$$

Les coeff. sont ceux de la ligne n du triangle de Pascal.

④

$\underline{n=1}$: $(a+b)^1 = a+b$

$\underline{n=2}$: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\underline{n=3}$: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

<u>Remarque</u> : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b^j a^{n-j}$ en permutant a et b puisque $(a+b)^n = (b+a)^n$

changement d'indice $j = n-k$ avec $n-j = k$

donc $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$.

<u>Preuve du binôme de Newton</u> :

* Formellement : récurrence sur n qui utilise la formule de Pascal.
* Intuitivement : $(a+b)^n = (a+b)(a+b)(a+b) \cdots (a+b)$ (n facteurs)

On développe : on obtient de nombreux termes en choisissant soit a soit b dans chaque facteur. Ils sont de la forme $a^k b^{n-k}$. Ce terme $a^k b^{n-k}$ est obtenu pour chaque façon de choisir les k facteurs dans lesquels on prend le a : il y en a $\binom{n}{k}$.

Application : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$: la somme des coeff. binomiaux qui sont sur la ligne n du triangle de Pascal est égale à 2^n.

Preuve : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.

Interprétation combinatoire : il y a 2^n parties de E, avec $E = [\![1, n]\!]$. En effet pour construire une partie A de E on doit :

* décider si $1 \in A$ ou pas : 2 choix
* ——— $2 \in A$ ——— : ———

  ⋮

* ——— $n \in A$ ou pas : 2 choix

2^n choix donc il y a 2^n parties de $[\![1, n]\!]$.

On peut grouper ces 2^n parties selon leur cardinal : $\forall k \in [\![0, n]\!]$ il y en a $\binom{n}{k}$ de cardinal k. Donc $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

NB : si A et B sont des matrices carrées qui $\underbrace{\text{commutent}}_{\text{i.e. } AB = BA}$

alors le binôme de Newton s'applique aussi à A et B :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$ ⚠ c'est faux si $AB \neq BA$.

NB : On a $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + \underbrace{AB + BA}_{= 2AB \text{ si et seulement si } AB = BA} + B^2$

Application probabiliste : Notons X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres (n, p). Alors X prend ses valeurs dans $[\![0,n]\!]$ et : $\forall k \in [\![0,n]\!] \quad \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Ex : on tire à pile ou face n fois avec une pièce truquée (proba d'avoir pile $= p$). On note X le nombre de "Pile" obtenus.

Si on fixe une succession de n résultats dont k pile (par exemple : P P F F F F P avec $k=3$ et $n=7$), la proba d'avoir ces tirages (ici Pile aux 1er, 2è et 7è lancers, Face aux autres) est $p^k (1-p)^{n-k}$.

$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ car il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir les k tirages qui donneront "Pile" parmi les n tirages qu'on fait.

Comme X prend ses valeurs dans $[\![0,n]\!]$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k) = 1 \text{ i.e. } \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1}$$

↳ vrai car c'est $(p+(1-p))^n$ par le binôme de Newton.

<u>NB</u> : : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \, P(X=k) = np$

se démontre par des manipulations sur les coeff. binomiaux.

III Formule de Leibniz.

<u>Th</u> Soit f et g deux fonctions dérivables n fois (en un point ou sur un intervalle). Alors fg est dérivable n fois et :

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \, g^{(n-k)}(x).$$

<u>Ex</u> : $(fg)' = f'g + fg'$; $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$; $(fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + g'''$.

Ex : $f(x) = x$, $g(x) = e^x$: alors $f^{(k)}(x) = 0$ pour tout $k \geq 2$ donc

$$\cancel{f(x)g} \quad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x) = x e^x + n e^x = (x+n) e^x .$$

Donc la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $x \mapsto x e^x$ est $x \mapsto (x+n) e^x$.