9è cours
6/4/2021

Chapitre 4

Calcul Intégral
MDD 151
iM/EM/MSV

Développements limités (2/3)

5) Opérations sur les développements limités.

<u>Prop</u> : "On peut additionner deux D.L."

Si $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + o(x^n)$

avec P, Q polynômes de degré $\leq n$, alors

$$f(x) + g(x) = \underbrace{P(x) + Q(x)}_{\text{polynôme de degré } \leq n} + o(x^n)$$

<u>Prop</u> : "On peut faire le produit de deux DL en omettant simplement les termes en x^k pour $k > n$"

Si $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + o(x^n)$,

notons $P(x)\,Q(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{2n} x^{2n}$

et posons $R(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$ (c'est le polynôme $P(x)\,Q(x)$ dans lequel on a "enlevé" les termes en $x^{n+1}, x^{n+2}, \dots, x^{2n}$). Alors :

$$f(x)\,g(x) = R(x) + o(x^n)$$ est le DL

en 0 de $x \mapsto f(x)\,g(x)$ à l'ordre n.

<u>Preuve</u> (esquisse) : $\forall k > n$, $\quad c_k x^k + o(x^n) = o(x^n)$.

<u>Prop</u> : Supposons que $f(x) = P(x) + o(x^n)$

et $u(x) = Q(x) + o(x^n)$ <u>avec $Q(0) = 0$</u>

Notons $R(x)$ = le polynôme $P(Q(x))$ dans lequel on ne garde que les termes $c_k x^k$ avec $k \leq n$ (i.e. on omet tous les termes en x^k avec $k > n$).

Alors on a :

$$\underbrace{f(u(x))}_{\text{c'est la composée } (f\circ u)(x).} = R(x) + o(x^n).$$

on va l'utiliser avec x remplacé par u

4

Ex : $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ et $\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}$

On cherche ~~les~~ le DL à l'ordre 4 en 0 de la fonction φ définie par $\varphi(x) = \cos(\sin x)$:

$f(x) = \cos x$
$u(x) = \sin x$.

<u>Le plus simple</u> : poser $u = \sin x$

On s'intéresse à $\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + o(u^4)$

et on <u>remplace</u> u par $\sin x$, et plus précisément par le DL de $\sin x$:

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4\right)$$

⚠ Pourquoi avait-on le droit de remplacer u par $\sin x$ dans le DL ?

On a le DL de $\cos u$ quand $u \to 0$. (5)

On remplace u par $\sin x$; c'est possible car $\sin x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

A retenir : à chaque fois qu'on compose deux D.L. $f(u(x))$ il faut justifier que $u(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

(ce qui équivaut à $u(0) = 0$ ou à $Q(0) = 0$ car u continue en 0 et $u(x) = Q(x) + o(x^n)$)

Reprise du calcul :

* traitement du o : $o\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4\right)$

Méthode (c'est toujours la même) : $x \underbrace{- \frac{x^3}{6} + o(x^4)}_{= o(x)} \underset{x\to 0}{\sim} x$

donc $\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 \sim x^4$ donc $o\left(\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4\right) = o(x^4)$.

* <u>Terme carré</u> : $\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{6} + x\,o(x^4) - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{36} - \frac{x^3}{6}\,o(x^4) + x\,o(x^4) - \frac{x^3}{6}\,o(x^4) + o(x^4) \times o(x^4)$$

$= x^2 - \frac{x^4}{3}$ + beaucoup de termes qui vont rentrer dans le $o(x^4)$ qui est le terme d'erreur qu'on obtient (cf. page 5)

* <u>Puissance 4ème</u> : $\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 = x^4 + o(x^4)$

(car si on imagine le développement, tous les termes sauf x^4 vont rentrer dans le $o(x^4)$.

<u>Bilan</u> : $\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) + \frac{1}{24}\left(x^4 + o(x^4)\right) + o(x^4)$

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4).$$

Exemple de produit de 2 DL :

$$(\cos x)(\sin x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \boxed{o(x^4)} - \frac{x^3}{2} + \cancel{\frac{x^5}{12}} - \cancel{\frac{x^2}{2}o(x^4)} + \cancel{\frac{x^5}{24}} - \cancel{\frac{x^7}{24\times 6}} + \cancel{\frac{x^4}{24}o(x^4)}$$

$$+ \cancel{x\,o(x^4)} - \cancel{\frac{x^3}{6}o(x^4)} + \cancel{o(x^4)\,o(x^4)}$$

$\hookrightarrow = o(x^5)$ qui disparaît dans le $o(x^4)$

$$= x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^4)$$

Autre méthode : $(\cos x)(\sin x) = \frac{1}{2}\sin(2x) = \frac{1}{2}\left((2x) - \frac{(2x)^3}{6} + o\left((2x)^4\right)\right)$

$\hookrightarrow$ car $2x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$: c'est une composition.

Ce qui donne le même résultat.

Application de la composition de DL : calcul de l'inverse.

Idée : pour calculer le DL de $\frac{1}{f(x)}$ on essaye de se ramener à $\frac{1}{1-u}$ avec u qui tend vers 0.

Et alors on utilise le DL : ~~de~~ $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + .. + u^n + o(u^n)$.

→ Cas favorable : la fonction au dénominateur tend vers 1.

Exemple : On cherche le DL en 0 de $\frac{1}{\cos x}$ à l'ordre 5.

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} = \frac{1}{1-u}$$

en posant $u = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} - o(x^5)$. Comme u tend vers 0 quand $x \to 0$, on a : $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + o(u^5)$

et on peut remplacer u par sa valeur dans ce DL.

On remplace : ⊛ Terme d'erreur : on a $u = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} - o(x^5) \sim \frac{x^2}{2}$ (9)

donc $u^5 \sim \frac{x^{10}}{2^5}$ donc $o(u^5) = o\left(\frac{x^{10}}{2^5}\right) = o(x^{10})$.

⚠ On veut seulement un DL à l'ordre 5 de $\frac{1}{\cos x}$. En procédant ainsi on aura énormément de termes inutiles qui vont à la fin être absorbés par un $o(x^5)$.

Par exemple $u^5 \sim \frac{x^{10}}{2^5}$ donc $u^5 = o(x^5)$.

De même pour u^4 (et u^3).

On compose donc en utilisant le DL de $\frac{1}{1-u}$ à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3).$$

terme d'erreur qui va subsister

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-u} = 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} - \boxed{o(x^5)}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} - o(x^5)\right)^2$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} - o(x^5)\right)^3}_{\sim \frac{x^6}{8} \text{ donc c'est } o(x^5)} + \underbrace{o(u^3)}_{\text{rentre dans } o(x^5)}$$

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) + \frac{x^4}{4}$$ car tous les autres termes qu'on obtient en développant rentrent dans le $o(x^5)$.

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)$$

NB : si on avait fait le DL de $\frac{1}{1-u}$ à l'ordre 2 on aurait eu $1 + u + u^2 + o(u^2)$ avec $u^2 \sim \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = \frac{x^4}{4}$ donc $o(u^2) = o(x^4)$ et on aurait obtenu le DL de $\frac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4 seulement, et pas à l'ordre 5.

Application : DL de $\tan x = \left(\frac{1}{\cos x}\right)(\sin x)$; on trouve

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

Comment calculer l'inverse d'un DL (ou le DL d'un inverse) lorsque le dénominateur ne tend pas vers 1 ?

Ex : $\dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{1}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}$

Méthode : factoriser le dénominateur par un équivalent simple

Ici $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \sim x$

On écrit : $\dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{1}{x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)}$

$$= \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 - \underbrace{\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)}_{\text{on l'appelle } u}}$$

et on a bien $u \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

donc on peut appliquer le DL de $\dfrac{1}{1 \cancel{+} - u}$.

<u>Prop</u> : "On peut primitiver un DL"

Soit f telle que $f(x) = P(x) + o(x^n)$, avec f continue sur I.

Notons F une primitive de f et $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1}$

(en notant $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$).

Alors : $$F(x) = \underbrace{F(0) + Q(x)}_{\text{polynôme de degré} \leq n.} + o(x^{n+1}).$$

<u>Ex</u> : si $f(x) = \underbrace{5 + 4x - x^2}_{} + o(x^2)$ alors $F(x) = \underbrace{F(0)}_{} + \underbrace{5x + 2x^2 - \frac{x^3}{3}}_{} + \underbrace{o(x^3)}_{}$

primitivation

⚠ ne pas oublier la constante d'intégration $F(0)$

on a gagné un ordre ; on obtient un DL à l'ordre $n+1$ en partant d'un DL à l'ordre n

Exemple : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$

donne en primitivant :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^{n+1})}_{\text{à réécrire (en remplaçant } n+1 \text{ par } n)}$$

vaut 0 en 0

Réécrire avec n

De même : $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$

(obtenu par composition en prenant $u = x^2$ dans $\frac{1}{1+u}$, avec $u \xrightarrow[x\to 0]{} 0$)

donne $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$.

vaut 0 en 0

Idem on peut montrer (cf. poly) que :

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k} k!^2} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}).$$

En pratique : Règle : " On a le droit de primitiver un DL ; $o(x^n)$ donne $o(x^{n+1})$ par primitivation. "

(⚠ Ne pas oublier la constante d'intégration)

Preuve de la Prop :

1ère étape : Soit $\varepsilon_0 : I \to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon_0(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Montrons que $\int_0^x t^n \varepsilon_0(t)\,dt = o(x^{n+1})$ quand $x \to 0$.

Preuve de ceci : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in I$, $|t| < \alpha \Rightarrow |\varepsilon_0(t)| < \varepsilon$.

Soit $x \in I$ tq $|x| < \alpha$. Alors pour tout t compris entre 0 et x on a $|t| \leq |x| < \alpha$

donc $|\varepsilon_0(t)| < \varepsilon$ d'où : $\left| \int_0^x t^n \varepsilon_0(t)\,dt \right| \leq \left| \int_0^x |t|^n |\varepsilon_0(t)|\,dt \right| < \varepsilon \underbrace{\left| \int_0^x |t|^n\,dt \right|}_{= \varepsilon \frac{|x|^{n+1}}{n+1}}$

D'où : $\left| \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \varepsilon_0(t)\,dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{n+1} \leq \varepsilon$ pour tout $x \in I$ tel que $|x| < \alpha$.

On a montré que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n \varepsilon_0(t)\,dt = 0$, i.e. $\int_0^x t^n \varepsilon_0(t)\,dt = o(x^{n+1})$.

2ème étape : $f(x) = P(x) + x^n \varepsilon_0(x)$ avec $\varepsilon_0(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ (par définition du $o(x^n)$, il existe une telle fonction ε_0). On intègre les deux membres de 0 à x :

$$\underbrace{\int_0^x f(t)\,dt}_{\substack{= F(x) - F(0) \\ \text{car } F \text{ est une primitive de } f.}} = \underbrace{\int_0^x P(t)\,dt}_{\substack{= Q(x) \text{ avec} \\ \text{les notations de} \\ \text{la Prop.}}} + \underbrace{\int_0^x t^n \varepsilon_0(t)\,dt}_{\substack{= o(x^{n+1}) \text{ d'après} \\ \text{l'étape 1}}}$$

ceci termine la preuve.

II Applications des développements limités.

1°) Calcul d'équivalents ou de limites.

Prop : Soit f une fonction telle que $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$.
Supposons que $a_0, a_1, \dots, a_n$ ne sont pas tous nuls et notons k le plus petit entier tel que $a_k \neq 0$.
Alors on a $f(x) \sim a_k x^k$ ~~$x\to 0$~~ quand $x \to 0$.

A retenir : le premier terme NON NUL d'un D.L. donne un équivalent simple de la fonction.

Ex : $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$

$= 0 + 1x + 0x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 0x^4 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$

PREMIER TERME NON NUL

donc $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Preuve : on a $f(x) = a_k x^k + \underbrace{a_{k+1} x^{k+1} + \dots + a_n x^n + o(x^n)}_{\text{tous ces termes sont des } o(x^k)}$

avant a_k tous les termes sont nuls puisque k est minimal

donc $f(x) = a_k x^k + o(x^k)$

$= a_k x^k + o(a_k x^k)$ car $a_k \neq 0$

$\underset{x \to 0}{\sim} a_k x^k$.

A retenir : on trouve un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0$ en prenant le 1^{er} terme non nul de son DL.

Ex : $\ln(1+x) \sim x$ (cf. page 13)

$\sin x \sim x$

$\arctan x \sim x$ (cf. p. 13)

$\arcsin x \sim x$ (cf. p. 13)

à connaître par cœur

Que dire d'un équivalent de e^x ? (quand $x \to 0$)

On a $e^x \sim 1$ car $\lim_{x \to 0} e^x = 1$ avec $1 \neq 0$

(ou en appliquant la prop précédente à $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$)

⚠ écrire $e^x \sim 1+x$ ou $e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2}$ n'est pas vraiment faux
mais c'est une très mauvaise idée, qui induit en erreur.
Par exemple on a aussi $e^x \sim 1 - 5x$ ou $e^x \sim 1 + 2x - \frac{x^2}{7}$:
ce sont des relations vraies mais qui induisent en erreur :
ne pas les utiliser.

En pratique quand on a une fonction $f(x)$, lui chercher toujours des équivalents simples : $f(x) \sim a x^b$ par exemple
ici éviter de mettre une somme.

Comment dire quelque chose de plus précis que $e^x \sim 1$ tout en utilisant un équivalent ?

$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc $\boxed{e^x - 1 \sim x.}$

à connaître (très utile)

De même : $\underbrace{e^x - 1 - x}_{} \sim \frac{x^2}{2}$ car $e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

↳ exemple d'une fonction f telle que $f(0) = 0$ mais pour laquelle $f(x) \underset{x\to 0}{\not\sim} x$ puisque $f(x) \sim \frac{x^2}{2}$.

Autre exemple : $\cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1$

$$\boxed{1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}}$$

à connaître aussi

car $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
donc $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Autrement dit, $\cos x - 1 \sim \frac{-x^2}{2}$.

Application : déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\cos x) - 1}{(\sin x) \cdot \ln(1+x)}$. C'est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

<u>Méthode</u> pour lever une forme indéterminée avec des produits et/ou des quotients, trouver un équivalent simple de chaque facteur, ce qui donne un équivalent du produit/quotient.

Ici : (quand $x \to 0$) $\cos x - 1 \sim \dfrac{-x^2}{2}$ $\quad \sin x \sim x \quad \ln(1+x) \sim x$

donc : $$\frac{\cos x - 1}{(\sin x)(\ln(1+x))} \sim \frac{-\frac{x^2}{2}}{x \cdot x} = \frac{-1}{2}$$

Etre équivalent à $\frac{-1}{2}$ quand $x \to 0$, c'est la même chose que tendre vers $\frac{-1}{2}$ (puisque $\frac{-1}{2} \neq 0$). D'où : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{(\sin x)\ln(1+x)} = \frac{-1}{2}$.

Autre exemple de calcul de limite grâce à un DL :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}.$$

<u>Méthode</u> : quand on a une expression de la forme a^b avec b "compliqué" (autre chose qu'un entier ou un rationnel fixé) : utiliser la définition $a^b = \exp(b \ln a)$.

Ici : $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = \exp\left(\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)$.

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = \ln(1+u) \text{ avec } u = \frac{-x^2}{6} + o(x^2)$$

(on a bien $u \xrightarrow[x \to 0]{} 0$)

$$= u + o(u)$$

$$= \frac{-x^2}{6} + o(x^2) + \underbrace{o\left(\frac{-x^2}{6} + o(x^2)\right)}_{= o(x^2) \text{ car } \frac{-x^2}{6} + o(x^2) \sim \frac{-x^2}{6}}$$

$$= \frac{-x^2}{6} + o(x^2)$$

$$\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = \frac{-1}{6} + o(1) \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{-1}{6}$$

PAR CONTINUITÉ DE L'EXPONENTIELLE

Bilan : $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{-1}{6}$ donc $\lim_{x \to 0} \exp\left(\frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = \boxed{\exp\left(\frac{-1}{6}\right)}$.