

MDD151 FEUILLE 1: CORRIGÉ

Exercice 1. 1. On voit tout d'abord que $x^2 + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est dérivable (et de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$ comme composition de la fonction racine carrée ($\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$) et $x \mapsto x^2 + 1$ ($\mathcal{C}^\infty$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$). Or,

$$x + \sqrt{x^2 + 1} > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Comme $\ln$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et $x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 1}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$, on déduit que $x \mapsto f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On calcule la dérivée de f :

$$f'(x) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

2. D'après le calcul plus haut on voit que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Un résultat du cours (à la fin de la page 8 du poly) assure que f est strictement croissante. On calcule:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{1 + x^2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = 0,$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1 + x^2}) = +\infty,$$

on déduit que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

On peut donc conclure (à l'aide du théorème 1.9 dans le poly) que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une bijection continue.

3. Soit $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction réciproque de f (**à ne pas confondre avec $1/f$**). On rappelle que f^{-1} est aussi une bijection continue. On pose $g(x) = e^x f^{-1}(x)$ et on calcule la dérivée de g . Soit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = y_0$. D'après le cours (théorème 1.14) on a

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

En utilisant cela on peut calculer la dérivée de g en y_0 :

$$g'(y_0) = e^{y_0} ((f^{-1})'(y_0) + f^{-1}(y_0)) = e^{y_0} \left(\frac{1}{f'(x_0)} + x_0 \right) = e^{y_0} \left(\sqrt{x_0^2 + 1} + x_0 \right),$$

et on reconnaît $g'(y_0) = e^{y_0} e^{f(x_0)} = e^{2y_0}$. On conclut que $g'(y) = e^{2y}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. On en déduit que $g(y) = \frac{1}{2} e^{2y} + C$ où C est une constante réelle qu'on va déterminer à l'aide de la valeur de $g(0) = f^{-1}(0)$. Or, $f(0) = 0$, donc $f^{-1}(0) = 0$. On a finalement

$$0 = g(0) = \frac{1}{2} e^0 + C,$$

puis $C = -\frac{1}{2}$. On conclut que $g(y) = \frac{1}{2} (e^{2y} - 1)$, puis que

$$f^{-1}(y) = e^{-y} g(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Où se trouve la fonction f dans le poly? Il faut lire en diagonal et on verra que c'est à la fin (dans l'Appendice B, Proposition B4 page 85). La fonction f ci-dessus est argsh (la fonction réciproque de la fonction sinus hyperbolique).

Exercice 2. 1. On a que $f'(x) = 1 - \sin(x) \geq 0$ pour tout $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ et que $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = \pi/2$. D'après le cours, f est une bijection entre $[-\pi/2, \pi/2]$ et $[a, b]$ où $a = f(-\pi/2) = -\pi/2$ et $b = f(\pi/2) = \pi/2$. Donc $f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ est une bijection continue strictement croissante.

2. La fonction réciproque $g = f^{-1} : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ est aussi une bijection continue strictement croissante.

3. Comme f' ne s'annule pas sur $J = [-\pi/2, \pi/2[$, on peut utiliser la formule de dérivée dans le cours pour calculer la dérivée de g en un point $y \in J$:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1 - \sin(x)}, \quad f(x) = y.$$

La fonction $x \mapsto 1 - \sin(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J et elle ne s'annule pas sur J . On déduit que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1 - \sin(x)}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J . Comme g est dérivable sur J de dérivée

$$g'(y) = \frac{1}{1 - \sin(g(y))}, \quad y \in J,$$

on voit que g' est dérivable:

$$g''(y) = g'(y) \cos(g(y)) \frac{1}{(1 - \sin(g(y)))^2} = \frac{\cos(g(y))}{(1 - \sin(g(y)))^3}, \quad y \in J.$$

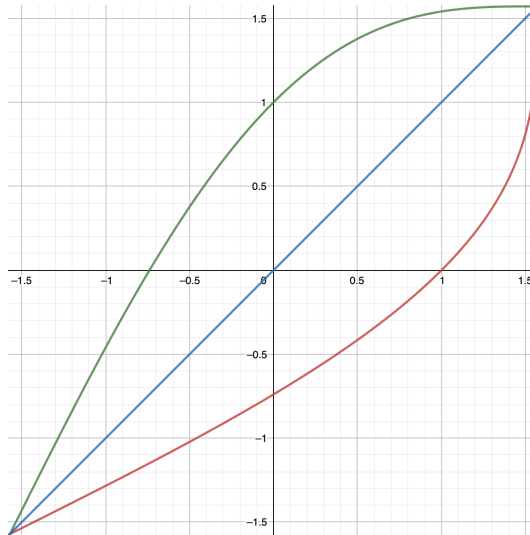
En particulier on a $g'(-\pi/2) = 1/2$ et $g''(-\pi/2) = 0$.

Montrons g n'est pas dérivable (à gauche) en $\pi/2$. Soit $y \in [-\pi/2, \pi/2[$ voisin de $\pi/2$. Le théorème des accroissements finis assure qu'il existe $z \in]y, \pi/2[$ tel que

$$\frac{g(y) - g(\pi/2)}{y - \pi/2} = g'(z).$$

Lorsque $y \rightarrow \pi/2$ à gauche, $z \rightarrow \pi/2$ et $g(z) \rightarrow \pi/2$, donc $g'(z) = \frac{1}{1 - \sin(g(z))} \rightarrow +\infty$. On conclut que g n'est pas dérivable à gauche en $\pi/2$.

4. Le graphe de f est en vert et celui de g est en rouge, la première bissectrice est en bleu:



Exercice 3. On considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x & \text{si } x < 0 \\ f_2(x) = x^2 & \text{si } x \in [0, 1] \\ f_3(x) = \sqrt{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

On vérifie d'abord que f est une bijection. Il est clair que la première fonction f_1 est une bijection de $] -\infty, 0[$ dans lui-même. La deuxième fonction est une bijection de $[0, 1]$ dans lui-même car $f_2'(x) = 2x > 0$ sur $]0, 1[$ et $f_2(0) = 0$, $f_2(1) = 1$. La fonction réciproque de f_2 est $f_2^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$. La troisième fonction f_3 est une bijection de $]1, +\infty[$ dans lui-même car $f_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ pour tout $x > 1$ et $f_3(1) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = +\infty$. Sa réciproque est $f_3^{-1}(x) = x^2$, $x > 1$. Comme l'image de f_1, f_2, f_3 sont deux à deux disjoints, on en déduit que f est une bijection et la fonction réciproque est donnée par

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \in [0, 1] \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Pour g :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{x}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1) + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

on n'a rien à faire car g n'est pas bijective: $g(0) = 3/2 = g(3/2)$.

Exercice 4. On a $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$. La fonction f est dérivable sur

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 3 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 + 2 > 0\} = \mathbb{R}.$$

On a utilisé le fait que $(x-1)^2 \geq 0$ donc $(x-1)^2 + 2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On calcule la dérivée de f :

$$f'(x) = \frac{2(x-1)}{x^2 - 2x + 3}.$$

On voit que pour tout $x > 1$, $f'(x) > 0$ et que $f(1) = \ln(2)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Donc f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. D'après le cours, f réalise une bijection strictement croissante de $[1, +\infty[$ dans $[\ln(2), +\infty[$. Soit $g = f^{-1} : [\ln(2), +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ la fonction réciproque de f . Soit $x \geq 1$ et $y = f(x)$. Alors $e^y = (x-1)^2 + 2$. On regarde l'équation $(x-1)^2 + 2 = e^y$ comme une équation en variable x . Elle admet deux solutions: $1 \pm \sqrt{e^y - 2}$. Comme $x \geq 1$, on a $x = 1 + \sqrt{e^y - 2}$, donc la fonction g peut être écrite comme:

$$g(y) = 1 + \sqrt{e^y - 2}, \quad y \in [\ln(2), +\infty[.$$

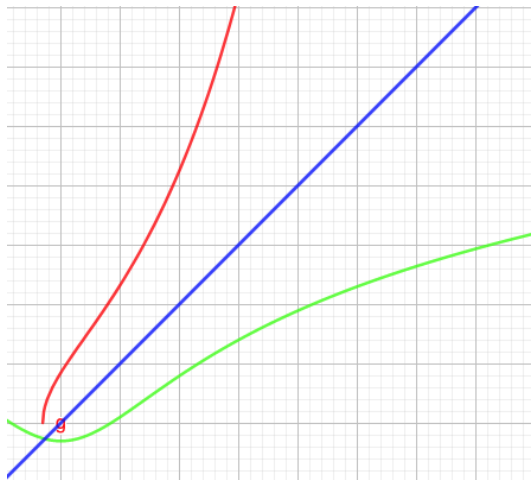
On calcule la dérivée de g en $y \in]\ln(2), +\infty[$:

$$g'(y) = \frac{e^y}{2\sqrt{e^y - 2}}.$$

Par contre, g n'est pas dérivable à droite en $\ln(2)$. Pour la voir, on remarque d'abord que $g'(y) \rightarrow +\infty$ lorsque $y \rightarrow \ln(2)^+$. Si $z \rightarrow \ln(2)^+$, d'après le théorème des accroissements finis il existe $y \in]\ln(2), z[$ (donc $y \rightarrow \ln(2)^+$) tel que

$$\frac{g(z) - g(\ln(2))}{z - \ln(2)} = g'(y) \rightarrow +\infty.$$

Dans le dessin, le graphe de f est en vert, celui de g est en rouge et la première bisectrice est en bleue:



Exercice 5. On cherche les réels m tels que $f(x) = \ln(x^3 + x^2 + mx)$ est définie sur $]0, +\infty[$. Comme $\ln$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, on voit que f est définie sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $x^3 + x^2 + mx > 0$ pour tout $x > 0$. On factorise

$$x^3 + x^2 + mx = x(x^2 + x + m).$$

Soient $a \leq b$ deux solutions de l'équation $x^2 + x + m = 0$. Comme $a + b = -1$, on a $a < 0$. On factorise $x^3 + x^2 + mx = (x - a)x(x - b)$. Si $b > 0$ alors $(x - a)x(x - b) < 0$ pour tout $x \in]0, b[$. Si $b \leq 0$, on a $(x - a)x(x - b) > 0$ pour tout $x > 0$. La condition

$$x^3 + x^2 + mx > 0, \forall x > 0$$

est équivalente à

$$(x - a)x(x - b) > 0, \forall x > 0,$$

qui est équivalente à $b \leq 0$.

Comme $m = ab$, cela est équivalent à $m \geq 0$.

On suppose désormais que $m \geq 0$. Montrons f est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On calcule la dérivée de f en $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 2x + m}{x^3 + x^2 + mx} > 0,$$

car le dénominateur est strictement positif et au numérateur on a une somme de trois réels ≥ 0 et deux entre eux sont strictement positifs. Donc f est une bijection de $]0, +\infty[$ dans un intervalle I . Pour déterminer le dernier on calcule:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

Donc f est une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$ solution de $x^y = y^x$. En prenant $\ln$ des deux côtés on voit que

$$y \ln x = x \ln y,$$

donc $f(x) = f(y)$, où la fonction f est définie par $f(t) = \ln(t)/t$, $t > 0$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ car $\ln$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et t ne s'annule pas sur cet intervalle. On calcule la dérivée de f :

$$f'(t) = \frac{1 - \ln(t)}{t^2}.$$

On en déduit que $f'(t) = 0$ si et seulement si $t = e$, $f'(t) > 0$ pour tout $t \in]0, e[$, et $f'(t) > 0$ pour tout $t \in]e, +\infty[$. Ainsi f est strictement croissante sur $]0, e[$ et strictement décroissante sur $]e, +\infty[$. On distingue trois cas:

- (1) Si $0 < x < e$ et $0 < y < e$ alors $x = y$ car f est strictement croissante sur $]0, e[$.
- (2) Si $e < x$ et $e < y$ alors $x = y$ car f est strictement décroissante sur $]e, +\infty[$.
- (3) Le dernier cas est lorsque $x < e < y$ ou $y < e < x$. Si l'une des deux x, y est 1 alors l'autre est aussi 1. Si $x = 2$ alors l'équation $f(t) = f(2)$ admet exactement deux solutions, l'une d'elles est 2 et l'autre est dans $]e, +\infty[$. Par un simple test on voit que $t = 4$ vérifie $t^2 = 2^t$. On conclut que les solutions (x, y) entiers strictement positifs de $x^y = y^x$ sont

$$\{(x, x) \in \mathbb{N}^*\} \cup \{(2, 4), (4, 2)\}.$$

Exercice 7. La fonction $\sin : [0, \pi/2] \rightarrow [0, 1]$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, 1]$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, 1]$ (**mais elle n'est pas dérivable à droite en 0**). Par composition, la fonction $x \mapsto \sqrt{\sin(x)}$ est continue sur $[0, \pi/2]$, dérivable sur $]0, \pi/2]$. On calcule la dérivée de f :

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}} + 1 > 0, \quad x \in]0, \pi/2].$$

D'après le cours, f est une bijection continue de $]0, \pi/2]$ dans $]0, 1 + \pi/2]$, et f est strictement croissante sur $]0, \pi/2]$. Comme $f(0) = 0$, il s'en suit que f est une bijection de $[0, \pi/2]$ dans $[0, 1 + \pi/2]$.

Comme f est strictement croissante et continue, f^{-1} est aussi strictement croissante et continue. Or, $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0, \pi/2]$. Donc f^{-1} est dérivable sur $]0, 1 + \pi/2]$. Montrons f^{-1} est dérivable à droite en 0. On remarque d'abord que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$. Pour chaque $x \in]0, \pi/2[$ voisin de 0 d'après le théorème des accroissements finis il existe $y \in]0, x[$ tel que

$$(f^{-1})'(y) = \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(0)}{x - 0}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, on a que $y \rightarrow 0^+$ et donc $f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(0) = 0$. Comme $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ et $\lim_{z \rightarrow 0^+} f'(z) = +\infty$, on déduit que $\lim_{y \rightarrow 0^+} (f^{-1})'(y) = 0$. Il suit que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(0)}{x - 0} = 0,$$

ce qui signifie que f^{-1} est dérivable à droite en 0 et la dérivée est 0.

Exercice 8. 1. La fonction $x \mapsto \sqrt{x+2}$ est dérivable sur $] -2, +\infty[$. La fonction $y \mapsto \arcsin(y)$ est définie sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $[-\pi/2, \pi/2]$. Elle est dérivable sur $] -1, 1[$ de dérivée

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad y \in] -1, 1[.$$

On en déduit que la fonction $x \mapsto \arcsin\left(\frac{\sqrt{x+2}}{2}\right)$ est dérivable sur

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : x > -2 \text{ et } \frac{\sqrt{x+2}}{2} \in] -1, 1[\right\}.$$

Pour expliciter D on résoudre:

$$\frac{\sqrt{x+2}}{2} \in]-1, 1[\iff \frac{\sqrt{x+2}}{2} < 1 \iff \sqrt{x+2} < 2 \iff -2 \leq x < 2.$$

On conclut que f est dérivable sur $D =]-2, 2[$. La dérivée de f sur D est donnée par

$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x+2}} \frac{1}{\sqrt{1-(x+2)/4}} = \frac{1}{4\sqrt{1-(x/2)^2}}.$$

On reconnait la dérivée de la fonction $x \mapsto h(x) := \frac{\arcsin(x/2)}{2}$ dérivable sur $] -2, 2[$:

$$h'(x) = \frac{1}{4\sqrt{1-(x/2)^2}}.$$

On a donc $h'(x) = f'(x)$ donc $f(x) = h(x) + C$ où C est une constante à déterminer. On remplace $x = 0$ pour obtenir:

$$\frac{\pi}{4} = f(0) = h(0) + C = C.$$

Donc $f(x) = \frac{\arcsin(x/2)}{2} + \frac{\pi}{4}$.

2. La fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ est dérivable sur

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1-x}{1+x} > 0 \right\} =]-1, 1[.$$

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition, g est dérivable sur $] -1, 1[$.

On calcule la dérivée de g sur $] -1, 1[$:

$$g'(x) = \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)' \frac{1}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \frac{-2}{(1+x)^2} \frac{1+x}{2} = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

On reconnait la dérivée de la fonction arccos, donc

$$g(x) = \frac{\arccos(x)}{2} + C,$$

où C est une constante à déterminer. On remplace $x = 0$:

$$\frac{\pi}{4} = g(0) = \frac{\pi}{4} + C,$$

donc $C = 0$ et

$$g(x) = \frac{\arccos(x)}{2}, \quad x \in]-1, 1[.$$

Exercice 9. La fonction arccos est définie sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$. Par composition, la fonction f est définie sur

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x - 1 \in [-1, 1]\}.$$

Pour expliciter D on résout

$$-1 \leq x^2 + 2x - 1 \leq 1 \iff -1 \leq (x+1)^2 - 2 \leq 1 \iff 1 \leq (x+1)^2 \leq 3$$

$$\iff 1 \leq |x+1| \leq \sqrt{3} \iff x \in [0, \sqrt{3}-1] \cup [-\sqrt{3}-1, -2].$$

Donc f est définie sur $D = [0, \sqrt{3}-1] \cup [-\sqrt{3}-1, -2]$. On calcule la dérivée de f en $x \in]0, \sqrt{3}-1[\cup]-\sqrt{3}-1, -2[$:

$$f'(x) = -(2x+2) \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+2x-1)^2}}.$$

On fixe $x_0 \in \{0, \sqrt{3} - 1, -\sqrt{3} - 1, -2\}$. On a

$$\lim_{x \in D, x \rightarrow x_0} f'(x) = \pm\infty.$$

Montrons f n'est pas dérivable (à droite ou à gauche) en x_0 . On étudie la limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $y \in D$ entre x_0 et x (soit $]x_0, x[$ ou $]x, x_0[$) tel que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(y).$$

Lorsque $D \ni x \rightarrow x_0$, on a $D \ni y \rightarrow x_0$. Comme $f'(y) \rightarrow \pm\infty$, on voit que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, donc f n'est pas dérivable en x_0 .

Exercice 10. Résoudre

$$(1) \quad \arctan(2x) + \arctan(x) = \pi/4.$$

On utilise la formule

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)},$$

pour $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a, b, a + b \notin \pm\pi/2 + \mathbb{Z}\pi$. De l'équation (1) en prenant $\tan$ on obtient (attention les deux équations ne sont pas équivalentes)

$$\tan(\arctan(2x) + \arctan(x)) = \tan(\pi/4),$$

donc

$$\frac{2x + x}{1 - 2x^2} = 1.$$

La dernière équation est équivalente à

$$(2) \quad 2x^2 + 3x - 1 = 0,$$

qui admet deux solutions réelles:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Attention! Ce n'est pas encore fini. Comme nos deux équations ne sont pas équivalentes, on doit vérifier si les solutions de (2) sont aussi solutions de (1). Pour ce faire on pourra utiliser l'une des deux méthodes suivantes:

1. On remarque que si $x < 0$ alors $\arctan(x) < 0$ et $\arctan(2x) < 0$ donc $x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} < 0$ n'est pas une solution de notre équation. Or, pour $x \in]0, 1/2[$ on a $y = \arctan(x) + \arctan(2x) \in]0, \pi/2[$ et donc $y = \pi/4$ si et seulement si $\tan(y) = 1$. Donc, pour $x \in]0, 1/2[$ on a

$$\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4} \iff \tan(\arctan(x) + \arctan(2x)) = 1 \iff \frac{2x + x}{1 - 2x^2} = 1.$$

Finalement, si $x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$ on a $0 < x < 1/2$ et $\frac{2x + x}{1 - 2x^2} = 1$, donc x est une solution de notre équation.

2. On pourra également remarquer que la fonction $x \mapsto f(x) = \arctan(x) + \arctan(2x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}$. Comme $\pi/4 \in]-\pi/2, \pi/2[$, le

théorème des valeurs intermédiaires assure que l'équation $f(x) = \pi/4$ admet au moins une solution $x \in \mathbb{R}$. De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée

$$f'(x) = \frac{2}{1+4x^2} + \frac{1}{1+x^2} > 0.$$

On en déduit que l'équation $f(x) = \pi/4$ admet une unique solution $x \in \mathbb{R}$. Comme $f(0) = 0$, $x \in]0, +\infty[$. On conclut que $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$ est l'unique solution de (1).

Résoudre

$$(3) \quad \arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x).$$

Pour que notre équation a un sens, il faut que les fonctions soient définies. La fonction $\arcsin$ est définie sur $[-1, 1]$. Il faut donc que $2x \in [-1, 1]$, $x\sqrt{3} \in [-1, 1]$, et $x \in [-1, 1]$. On cherche donc $x \in [-1/2, 1/2]$. De (3) en prenant $\sin$ et en utilisant la formule $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$ on obtient

$$(4) \quad 2x \cos \arcsin(x\sqrt{3}) - x\sqrt{3} \cos(\arcsin(2x)) = x.$$

Or, $\cos(\arcsin(y)) = \sqrt{1-y^2}$, donc (4) est équivalente à

$$(5) \quad 2x\sqrt{1-3x^2} - x\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2} = x.$$

On trouve facilement une solution $x = 0$. Pour en chercher d'autres on factorise par $x \neq 0$. On va maintenant résoudre

$$\sqrt{4-12x^2} - \sqrt{3-12x^2} = 1 \iff \sqrt{4-12x^2} = 1 + \sqrt{3-12x^2}.$$

Comme les deux cotés sont ≥ 0 , en prenant le carré on obtient une équation équivalente:

$$(6) \quad 4-12x^2 = 2\sqrt{3-12x^2} + 4-12x^2 \iff 3-12x^2 = 0 \iff x = \pm \frac{1}{2}.$$

On voit que (4) admet trois solutions: $x = 0$ ou $x = \pm 1/2$. On peut remplacer ces trois valeurs dans (3) pour vérifier qu'elles sont solutions de (3). On conclut que l'ensemble des solutions de (3) est $\{0, \pm 1/2\}$.

Résoudre

$$\arctan(x) + \arctan(x\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{12}.$$

La fonction $x \mapsto f(x) := \arctan(x) + \arctan(x\sqrt{3})$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable de dérivée

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \sqrt{3} \frac{1}{1+3x^2} > 0.$$

On calcule $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\pi$. Donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $] -\pi, \pi[$. De plus, $f(1) = \pi/4 + \pi/3 = 7\pi/12$. Donc $x = 1$ est l'unique solution de notre équation.

On pourra aussi résoudre directement. On calcule

$$\tan(7\pi/12) = \tan(\pi/3 + \pi/4) = \frac{\tan(\pi/3) + \tan(\pi/4)}{1 - \tan(\pi/3)\tan(\pi/4)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}}.$$

Si x est solution de notre équation, en prenant $\tan$ on obtient

$$\frac{x + x\sqrt{3}}{1 - x^2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \iff (1 - \sqrt{3})x = 1 - x^2\sqrt{3} \iff (x-1) + \sqrt{3}(x^2-1) = 0.$$

La dernière équation admet deux solutions $x_1 = 1$ et $x_2 = 1 - 1/\sqrt{3} < 0$. On peut éliminer x_2 par une simple vérification $f(x_2) < 0$. On vérifie facilement que $f(x_1) = 7\pi/12$ donc $x_1 = 1$ est l'unique solution de notre équation.

Exercice 11. Résoudre

$$\arcsin(x) = \arcsin\left(\frac{2}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right).$$

Il faut s'assurer que le nombre de droite est compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. On va démontrer un résultat plus général:

$$\arcsin(x) + \arcsin(1-x) \leq \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Comme $y := \arcsin(x) + \arcsin(1-x) \in [0, \pi]$, il suffit de montrer que $\cos(y) \geq 0$. En utilisant $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ et $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ on a

$$\cos(y) = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(1-x)^2} - x(1-x).$$

Or, pour chaque $z \in [0, 1]$ on a $z(1-z) \geq 0$ donc $z^2 \leq z$. En appliquant cela avec $z = x$ et $z = (1-x)$ on obtient

$$\sqrt{1-x^2} \geq \sqrt{1-x} \geq (1-x), \text{ et } \sqrt{1-(1-x)^2} \geq \sqrt{1-(1-x)} = \sqrt{x} \geq x.$$

Il s'en suit que $\cos(y) \geq 0$, donc $y \in [0, \pi/2]$. On pourra également remarquer que $2/5 \leq 1/\sqrt{2}$ et $3/5 \leq 1/\sqrt{2}$. Comme $\arcsin$ est croissante sur $[-1, 1]$, on déduit que

$$\arcsin(2/5) \leq \arcsin(1/\sqrt{2}) = \pi/4, \quad \arcsin(3/5) \leq \arcsin(1/\sqrt{2}) = \pi/4,$$

puis $\arcsin(2/5) + \arcsin(3/5) \leq \pi/2$.

Par conséquent notre équation admet une unique solution

$$\begin{aligned} x &= \sin\left(\arcsin\left(\frac{2}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right) \\ &= \frac{2}{5} \cos\left(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)\right) + \frac{3}{5} \cos\left(\arcsin\left(\frac{2}{5}\right)\right) \\ &= \frac{8 + 3\sqrt{21}}{25}. \end{aligned}$$

On a utilisé $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$.

Résoudre

$$\arccos(x) = 2 \arccos(3/4).$$

On a $1 > 3/4 > 0$, donc comme $\arccos$ est décroissante $0 < \arccos(3/4) < \arccos(0) = \pi/2$, puis $0 < 2 \arccos(3/4) < \pi$. Notre équation admet une unique solution

$$x = \cos(2 \arccos(3/4)) = 2 \cos^2(\arccos(3/4)) - 1 = 1/8.$$

Résoudre

$$\arctan(x) = 2 \arctan(1/2).$$

On voit que $2 \arctan(1/2) \in]0, \pi/2[$, donc l'équation admet une unique solution

$$x = \tan(2 \arctan(1/2)) = \frac{2 \tan(\arctan(1/2))}{1 - \tan^2(\arctan(1/2))} = \frac{1}{1 - 1/4} = 4/3.$$

Exercice 12. Résoudre

$$3 \cos(x + \pi/4) = 1.$$

L'équation est équivalente à $\cos(x + \pi/4) = 1/3$. Comme $1/3 \in [-1, 1]$, l'ensemble de solutions est

$$\{x \in \mathbb{R} : x + \pi/4 \in \pm \arccos(1/3) + \pi\mathbb{Z}\} = -\frac{\pi}{4} \pm \arccos(1/3) + \pi\mathbb{Z}.$$

Résoudre

$$\sqrt{3} \cos(3x) + \sin(3x) = 1.$$

L'équation est équivalente à

$$\begin{aligned} \cos(3x) \cos(\pi/6) + \sin(3x) \sin(\pi/6) &= \cos(\pi/3) \\ \iff \cos(3x - \pi/6) &= \cos(\pi/3) \\ \iff 3x - \frac{\pi}{6} &\in \pm \frac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z} \\ \iff x &\in \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\right). \end{aligned}$$

Résoudre

$$\sin(x) - 2 \cos(2x) = 0.$$

On pose $y = \sin(x) \in [-1, 1]$. On a $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x)$. Donc

$$\begin{aligned} \sin(x) - 2 \cos(2x) &= 0 \\ \iff y - 2(1 - 2y^2) &= 0 \\ \iff 4y^2 + y - 2 &= 0. \end{aligned}$$

La dernière équation admet deux solutions réelles

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

Comme $|y_{1,2}| \leq 1$, l'ensemble des solutions de notre équation est

$$x = (\arcsin(y_{1,2}) + 2\pi\mathbb{Z}) \cup (\pi - \arcsin(y_{1,2}) + 2\pi\mathbb{Z}).$$

Exercice 13. 1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto x^3$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On calcule la dérivée de f :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{3x^2}{1+x^6} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Comme $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\pi$. Donc f réalise une bijection strictement croissante entre $\mathbb{R}$ et $] -\pi, \pi[$. Comme $3\pi/4 \in] -\pi, \pi[$, le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 3\pi/4$. Comme f est strictement croissante, α est l'unique solution de $f(x) = 3\pi/4$. De plus, $f(1) = \pi/2 < f(\alpha)$, donc $\alpha \in]1, +\infty[$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ on a

$$\frac{x+x^3}{1-x^4} = \frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{x}{1-x^2}.$$

On déduit que l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ tels que

$$\frac{x+x^3}{1-x^4} = -1$$

est l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ tels que

$$\frac{x}{1-x^2} = -1.$$

On résout la dernière:

$$\iff x^2 - x - 1 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Comme $f(\alpha) = \tan(3\pi/4) = -1$. On calcule

$$\tan(f(\alpha)) = \tan(\arctan(\alpha) + \arctan(\alpha^3)) = \frac{\alpha + \alpha^3}{1 - \alpha^4} = \frac{\alpha}{1 - \alpha^2}.$$

On en déduit que α est solution de $x^2 - x - 1 = 0$. Comme cette équation admet deux solutions et $\alpha > 1$, on en déduit que α est la solution qui est > 1 , donc $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 14. Comme $x < 0 \leq y$, on a $x^2 + y^2 > 0$. Donc $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ est bien définie. De plus, $y \leq \sqrt{y^2} < \sqrt{x^2+y^2}$. Donc $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \in [0, 1[$. Cela justifie la bonne définition de

$$\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

et de

$$\cos\left(\pi - \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right).$$

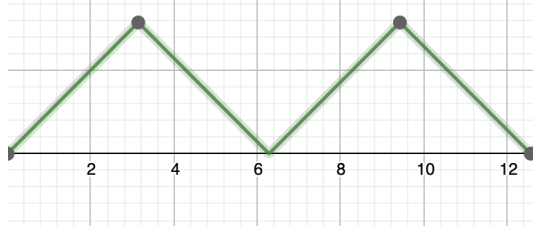
On simplifie:

$$\begin{aligned} \cos\left(\pi - \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right) &= -\cos\left(\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right) \\ &= -\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2+y^2}} \\ &= -\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned}$$

Dans la dernière ligne on a $|x| = -x$ car $x < 0$.

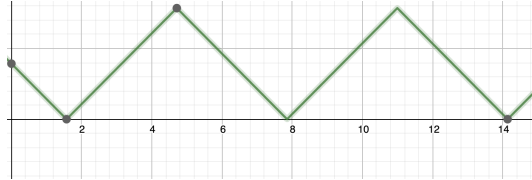
Exercice 15. 1a. Pour $x \in [0, \pi]$ on a $\arccos(\cos(x)) = x$. Pour $x \in [\pi, 2\pi]$ on a $2\pi - x \in [0, \pi]$ et $\cos(2\pi - x) = \cos(x)$. Donc $2\pi - x = \arccos(\cos(x))$. Pour $x \in [2\pi, 3\pi]$ on a $x - 2\pi \in [0, \pi]$ et $\cos(x - 2\pi) = \cos(x)$, donc $x - 2\pi = \arccos(\cos(x))$. Pour $x \in [3\pi, 4\pi]$ on a $4\pi - x \in [0, \pi]$ et $\cos(4\pi - x) = \cos(x)$, donc $4\pi - x = \arccos(\cos(x))$. Pour résumer on a:

$$\arccos(\cos(x)) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \pi] \\ 2\pi - x & \text{si } x \in [\pi, 2\pi] \\ x - 2\pi & \text{si } x \in [2\pi, 3\pi] \\ 4\pi - x & \text{si } x \in [3\pi, 4\pi] \end{cases}.$$



1b. On pose $y = \arccos(\sin(x)) \in [0, \pi]$. Alors $\cos(y) = \sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$. Si $x \in [0, \pi/2]$ on a $\pi/2 - x \in [0, \pi/2]$ donc $y = \pi/2 - x$. Si $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$ on a $\cos(y) = \cos(x - \pi/2)$ et $x - \pi/2 \in [0, \pi]$ donc $y = x - \pi/2$. Si $x \in [3\pi/2, 5\pi/2]$ on a $\cos(y) = \cos(5\pi/2 - x)$ et $5\pi/2 - x \in [0, \pi]$ donc $y = 5\pi/2 - x$. Si $x \in [5\pi/2, 7\pi/2]$ on a $y = x - 5\pi/2$. Si $x \in [7\pi/2, 4\pi]$ on a $y = 9\pi/2 - x$. Pour résumer on a :

$$\arccos(\sin(x)) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x & \text{si } x \in [0, \pi/2] \\ x - \pi/2 & \text{si } x \in [\pi/2, 3\pi/2] \\ 5\pi/2 - x & \text{si } x \in [3\pi/2, 5\pi/2] \\ x - 5\pi/2 & \text{si } x \in [5\pi/2, 7\pi/2] \\ 9\pi/2 - x & \text{si } x \in [7\pi/2, 4\pi] \end{cases}.$$

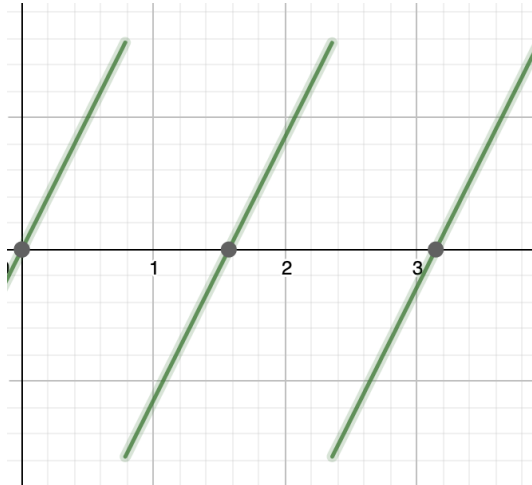


$$f(x) = \arctan(\tan(2x)), \quad x \in [0, \pi].$$

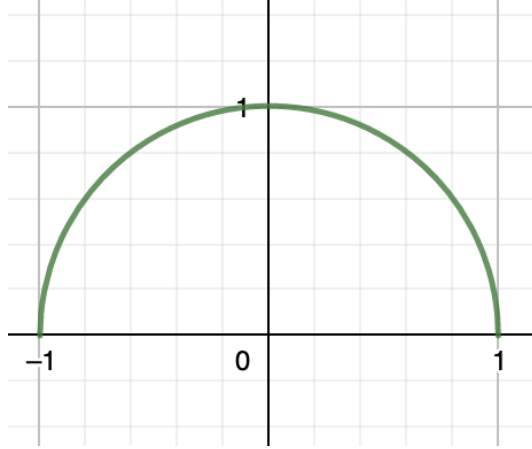
Pour $x \in [0, \pi/4[$ on a $2x \in [0, \pi/2[$ et $\tan(2x) = \tan(f(x))$, donc $f(x) = 2x$. Pour $x \in]\pi/4, 3\pi/4[$ on a $2x - \pi \in]-\pi/2, \pi/2[$ et $\tan(2x - \pi) = \tan(2x) = \tan(f(x))$, donc $f(x) = 2x - \pi$. Pour $x \in]3\pi/4, \pi]$ on a $2x - 2\pi \in]-\pi/2, 0]$ et $\tan(2x - 2\pi) = \tan(f(x))$, donc $f(x) = 2x - 2\pi$. Pour résumer on a

$$\arctan(\tan(2x)) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \pi/4[\\ 2x - \pi & \text{si } x \in]\pi/4, 3\pi/4[\\ 2x - 2\pi & \text{si } x \in]3\pi/4, \pi] \end{cases}.$$

On remarque aussi que f n'est pas continue en $\pi/4$ et en $3\pi/4$.



$$f(x) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2} = \cos(\arcsin(x)).$$



$$f(x) = \sin(3 \arctan(x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

On a $\sin(3u) = 3\sin(u) - 4\sin^3(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Pour le voir:

$$\begin{aligned} \sin(3u) &= \sin(2u + u) = \sin(2u)\cos(u) + \sin(u)\cos(2u) \\ &= 2\sin(u)\cos^2(u) + \sin(u)(1 - 2\sin^2(u)) \\ &= 2\sin(u)(1 - \sin^2(u)) + \sin(u) - 2\sin^3(u) \\ &= 3\sin(u) - 4\sin^3(u). \end{aligned}$$

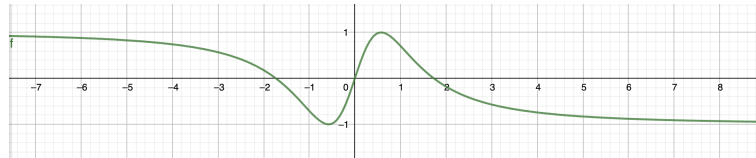
On va ensuite exprimer $\sin(u)$ en fonction de $\tan(u)$ pour $u = \arctan(x) \in]-\pi/2, \pi/2[$. Comme $u \in]-\pi/2, \pi/2[$ on a que $\sin(u)$ a le même signe que $\tan(u)$. On exprime d'abord $\sin(u)$ en fonction de $\tan(u)$:

$$\sin^2(u) = 1 - \cos^2(u) = 1 - \frac{1}{1 + \tan^2(u)} = \frac{\tan^2(u)}{1 + \tan^2(u)},$$

$$\sin(u) = \frac{\tan(u)}{\sqrt{1 + \tan^2(u)}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

En utilisant la formule $\sin(3u) = 3\sin(u) - 4\sin^3(u)$ on obtient

$$\sin(3u) = \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{4x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{3x - x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$



Exercice 16. On étudie

$$f_1(x) = \arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

Tout d'abord $f_1(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ tel que

$$-1 \leq \frac{1-x}{1+x} \leq 1.$$

On résout, pour $x \neq -1$,

$$-1 \leq \frac{1-x}{1+x} \iff 1 + \frac{1-x}{1+x} \geq 0 \iff \frac{2}{1+x} \geq 0 \iff x > -1,$$

$$\frac{1-x}{1+x} \leq 1 \iff 1 - \frac{1-x}{1+x} \geq 0 \iff \frac{2x}{1+x} \geq 0 \iff x < -1 \text{ ou } x \geq 0.$$

En combinant les deux conditions on voit que f_1 est définie sur $[0, +\infty[$. La fonction $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[0, +\infty[$ dans $] -1, 1]$ et la fonction arcsin est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $] -1, 1[$ dans $] -\pi/2, \pi/2[$. Par composition f_1 est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée

$$f_1'(x) = \left(\frac{1-x}{1+x} \right)' \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}}} = -\frac{2}{(1+x)^2} \frac{(1+x)}{\sqrt{4x}} = -\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

On reconnaît ici un terme qui ressemble à la dérivée de la fonction $x \mapsto -2 \arctan(\sqrt{x})$:

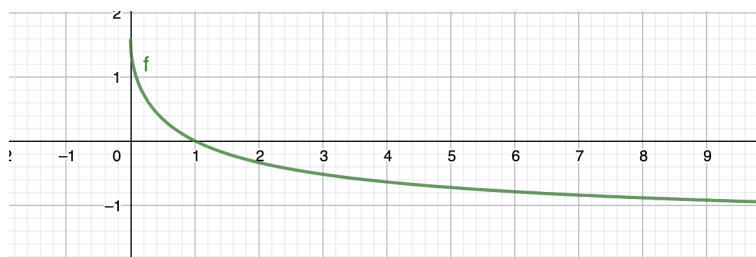
$$(-2 \arctan(\sqrt{x}))' = -2 \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{1+x} = -\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

On en déduit que $f_1(x) = -2 \arctan(\sqrt{x}) + C$ pour tout $x > 0$ où C est une constante. Par continuité l'égalité est valable aussi pour tout $x \geq 0$. On remplace $x = 0$ pour déterminer C :

$$\frac{\pi}{2} = f_1(0) = C,$$

donc $f_1(x) = -2 \arctan(\sqrt{x}) + \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \geq 0$.

Et voici le graphe de f_1 dessiné par Geogebra Graphing Calculator:



On étudie

$$f_2(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}).$$

La fonction $x \mapsto 2x\sqrt{1-x^2}$ est définie et continue sur $[-1, 1]$. Elle est dérivable sur $] -1, 1[$. La fonction f_2 est continue sur

$$\{x \in [-1, 1] : 2x\sqrt{1-x^2} \in [-1, 1]\}.$$

Or, pour tout $x \in [-1, 1]$ en développant l'inégalité $(|x| - \sqrt{1-x^2})^2 \geq 0$ on a $2|x|\sqrt{1-x^2} \leq 1$ avec égalité si et seulement si $|x| = \sqrt{1-x^2}$ si et seulement si $x = \pm\sqrt{2}/2$. Donc f_2 est continue sur $[-1, 1]$. De plus, $2|x|\sqrt{1-x^2} \in] -1, 1[$ si et seulement si $|x| \neq 1/\sqrt{2}$. On se rappelle que arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$. Par conséquent f_2 est dérivable sur $] -1, 1[\setminus \{\pm\sqrt{2}/2\}$. Pour $x \in] -1, 1[\setminus \{\pm\sqrt{2}/2\}$ on

calcule la dérivée de f_2 :

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \left(2x\sqrt{1-x^2}\right)' \frac{1}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}} \\ &= \left(2\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) \frac{1}{|2x^2-1|} \\ &= \frac{2(1-2x^2)}{|1-2x^2|\sqrt{1-x^2}} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1/2 \\ \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } |x| > 1/2 \end{cases} . \end{aligned}$$

Dans $[-1, -1/\sqrt{2}]$, la fonction $x \mapsto g(x) = f_2(x) + 2\arcsin(x)$ est continue, $g(-1) = -\pi$ et $g'(x) = 0$ dans $] -1, -1/\sqrt{2}[$. Par conséquent

$$f_2(x) = -2\arcsin(x) - \pi, \quad \forall x \in [-1, -1/\sqrt{2}].$$

Dans $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, la fonction $x \mapsto g(x) = f_2(x) - 2\arcsin(x)$ est continue et elle vérifie $g(0) = 0$, $g'(x) = 0$ pour tout $x \in] -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}[$. Par conséquent

$$f_2(x) = 2\arcsin(x), \quad \forall x \in [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}].$$

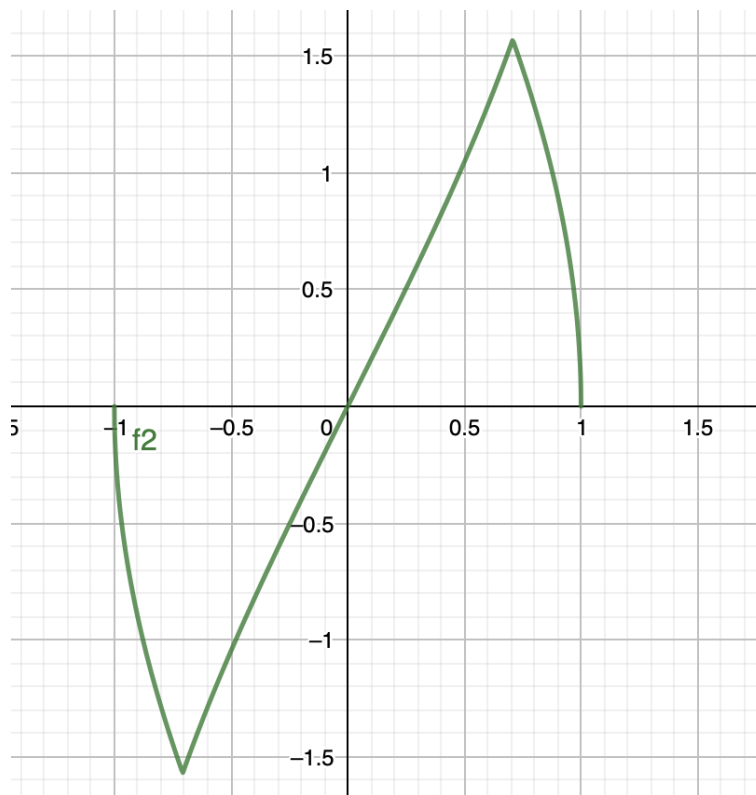
Dans $[1/\sqrt{2}, 1]$, la fonction $x \mapsto g(x) = f_2(x) + 2\arcsin(x)$ est continue et elle vérifie $g(1) = \pi$, $g'(x) = 0$ pour tout $x \in]1/\sqrt{2}, 1[$. Par conséquent

$$f_2(x) = -2\arcsin(x) + \pi, \quad \forall x \in [1/\sqrt{2}, 1].$$

Pour résumer on a

$$f_2(x) = \begin{cases} -2\arcsin(x) - \pi, & \text{si } x \in [-1, -1/\sqrt{2}] \\ 2\arcsin(x), & \text{si } x \in [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}] \\ -2\arcsin(x) + \pi, & \text{si } x \in [1/\sqrt{2}, 1] \end{cases} .$$

Et voici le graphe de f_2 dessiné par Geogebra Graphing Calculator:



On étudie

$$f_3(x) = \arctan(1/x).$$

La fonction f_3 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et

$$f'_3(x) = -\frac{1}{x^2} \frac{1}{1 + 1/x^2} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

On pose $g(x) := f_3(x) + \arctan(x)$. Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée 0: $g'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. On aimerait dire ici sans réfléchir plus que g est constante sur $\mathbb{R}^*$ mais c'est faux! On a vu un résultat de ce type au S1 mais pour les fonctions définies sur un intervalle. Ici $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle mais c'est l'union de deux intervalles $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Sur l'intervalle $] -\infty, 0[$, $g' = 0$ donc g est constante. On calcule

$$g(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$

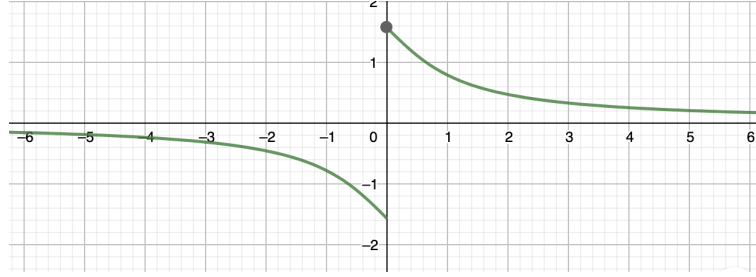
Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, $g' = 0$ donc g est constante. On calcule

$$g(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Pour résumer on a

$$f_3(x) = \begin{cases} \pi/2 - \arctan(x), & \text{si } x > 0 \\ -\pi/2 - \arctan(x), & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Et voici le graphe de f_3 dessiné par Geogebra Graphing Calculator:



On étudie

$$f_4(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right).$$

La fonction $x \mapsto \frac{2x}{1-x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. La fonction $\arctan$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par composition, f_4 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. On calcule la dérivée de f_4 en $x \neq \pm 1$:

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)' \frac{1}{1 + \frac{(2x)^2}{(1-x^2)^2}} \\ &= \frac{(2(1-x^2) + 4x^2)}{(1-x^2)^2} \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Dans $] -\infty, -1[$, la fonction $x \mapsto g(x) = f_4(x) - 2\arctan(x)$ est continue et elle vérifie

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 + \pi = \pi, \text{ et } g'(x) = 0, \forall x < -1.$$

Par conséquent, $f_4(x) = 2\arctan(x) + \pi$ pour tout $x < -1$.

Dans $] -1, 1[$, la fonction $x \mapsto g(x) = f_4(x) - 2\arctan(x)$ est continue et elle vérifie

$$g(0) = 0, \text{ et } g'(x) = 0, \forall x \in] -1, 1[.$$

Par conséquent, $f_4(x) = 2\arctan(x)$ pour tout $x \in] -1, 1[$.

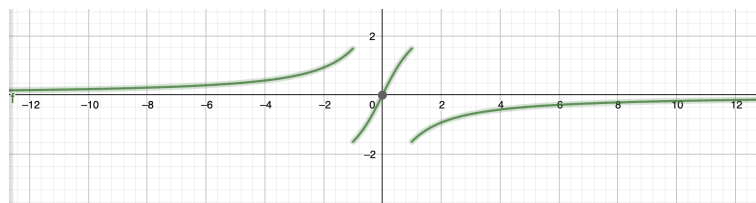
Dans $]1, +\infty[$, la fonction $x \mapsto g(x) = f_4(x) - 2\arctan(x)$ est continue et elle vérifie

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 - \pi = -\pi, \text{ et } g'(x) = 0, \forall x > 1.$$

Par conséquent, $f_4(x) = 2\arctan(x) - \pi$ pour tout $x > 1$. Pour résumer on a

$$f_4(x) = \begin{cases} 2\arctan(x) + \pi, & \text{si } x < -1 \\ 2\arctan(x), & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 2\arcsin(x) - \pi, & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Et voici le graphique de f_4 dessiné par Geogebra Graphing Calculator:



Exercice 17. Montrer que $\arcsin(4/5) = 2 \arctan(1/2)$.

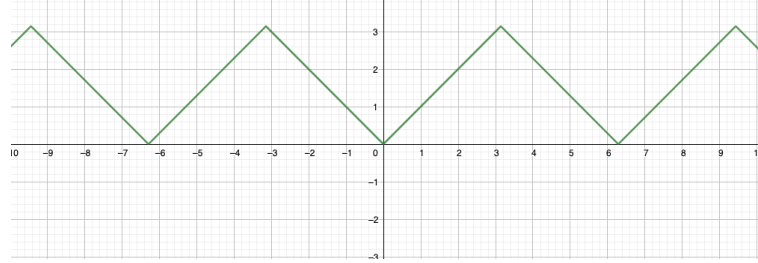
On a que $x := \arcsin(4/5) \in]0, \pi/2[$ et $y := \arctan(1/2) \in]0, \pi/4[$, donc $2y \in]0, \pi/2[$. Il suffit de montrer que $\sin(x) = \sin(2y)$. On a

$$\sin(2y) = \frac{2 \tan(y)}{1 + \tan(y)^2} = \frac{1}{1 + 1/4} = 4/5 = \sin(x).$$

Exercice 18. 1. Montrons f est périodique de période 2π : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x + 2\pi) = \arccos(\cos(x + 2\pi)) = \arccos(\cos(x)) = f(x).$$

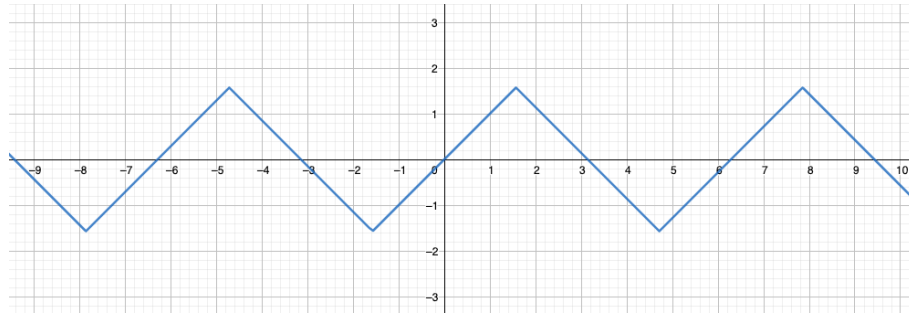
On a utilisé la périodicité de période 2π de $\cos$. Pour $x \in [-\pi, 0]$ on a $\cos(-x) = \cos(x)$ et $-x \in [0, \pi]$. Donc $f(x) = -x$. Pour $x \in [0, \pi]$ on a $f(x) = x$.



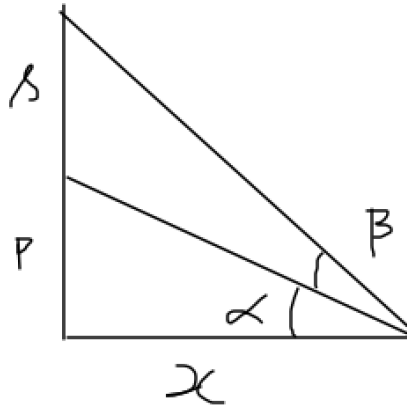
2. Montrons g est périodique de période 2π : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$g(x + 2\pi) = \arcsin(\sin(x + 2\pi)) = \arcsin(\sin(x)) = g(x).$$

On a utilisé la périodicité de période 2π de $\sin$. Pour $x \in [0, \pi/2]$ on a $g(x) = x$. Pour $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$ on a $-x + \pi \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $\sin(-x + \pi) = \sin(x)$, donc $g(x) = -x + \pi$. Pour $x \in [3\pi/2, 2\pi]$ on a $x - 2\pi \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $\sin(x - 2\pi) = \sin(x)$, donc $g(x) = x - 2\pi$.



Exercice 19. Soient s la hauteur de la statue, p la hauteur du piédestal et x la distance entre l'observateur et le piédestal. Soit α, β les angles comme dans le dessin. On veut maximiser $\beta \in [0, \pi/2]$.



On peut calculer $\tan(\alpha)$ et $\tan(\alpha + \beta)$ en fonction de s, p, x :

$$\tan(\alpha) = \frac{p}{x}, \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{s+p}{x}.$$

On obtient

$$\tan(\beta) = \tan(\alpha + \beta - \alpha) = \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan(\alpha)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\alpha + \beta)} = \frac{sx}{x^2 + p(s+p)}.$$

Ici $x > 0$ est une variable et $p > 0, s > 0$ sont des paramètres fixés. Maximiser β est équivalent à maximiser $\tan(\beta)$ ce qui est équivalent à minimiser

$$f(x) = \frac{x^2 + p(s+p)}{x} = x + \frac{p(p+s)}{x}, \quad x > 0.$$

On voit que f est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée

$$f'(x) = 1 - \frac{p(p+s)}{x^2}.$$

Un simple calcul montre que $f'(x_0) = 0$ avec $x_0 = \sqrt{p(p+s)}$ et $f'(x) > 0$ si et seulement si $x > x_0$. Par conséquent f est strictement croissante dans $]x_0, +\infty[$, et f est strictement décroissante dans $]0, x_0[$.

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

D'après le tableau de variation, f atteint son minimum en $x = x_0$. On conclut que pour voir la statue sous un angle maximal l'observateur doit se placer à une distance $x_0 = \sqrt{p(p+s)}$ du piédestal.