

Module MDD151 : Calcul intégral

Corrigé de la feuille d'exercices numéro 2

Intégrales

Exercice 1.—

Avant de commencer on remarque que si f est dérivable sur un intervalle I et $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur I .

$$f_1(x) = \tan^2(x).$$

f_1 est définie et continue sur $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On sait que $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.

Sur chaque intervalle $I \subset D$, les primitives de f_1 sont $\tan(x) - x + \text{Cste}$. Les primitives de f_1 sur D sont les fonctions de la forme:

$$g_1(x) = \tan(x) - x + C_k, \text{ si } x \in]\pi/2 + k\pi, \pi/2 + (k+1)\pi[,$$

où les C_k sont des constantes.

$$f_2(x) = \tan(x).$$

f_2 est définie et continue sur $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On se rappelle que la dérivée de $t \mapsto \ln |t|$ est $1/t$ sur $\mathbb{R}^*$. On définit la fonction $g_2(x) = -\ln |\cos(x)|$, $x \in D$. Pour tout $x \in D$ on a

$$g_2'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Il suit que dans chaque intervalle I de D , les primitives de f_2 sont $-\ln |\cos(x)| + \text{Cste}$. On conclut que les primitives de f_2 sur D sont les fonctions de la forme:

$$h_2(x) = -\ln |\cos(x)| + C_k, \text{ si } x \in]\pi/2 + k\pi, \pi/2 + (k+1)\pi[,$$

où les C_k sont des constantes.

$$f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}.$$

f_3 est définie sur $] -\infty, 2[$. Une primitive est $-2\sqrt{2-x}$. Comme $] -\infty, 2[$ est un intervalle, les primitives de f_3 sont $x \mapsto -2\sqrt{2-x} + \text{Cste}$.

$$f_4(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Si $c = 0$, et $d \neq 0$, f_4 est définie sur $\mathbb{R}$ et les primitives de f sont les fonctions

$$x \mapsto \frac{ax^2 + 2bx}{2d} + \text{Cste}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si $c \neq 0$, f_4 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$. On cherche une primitive de f_4 en écrivant

$$f_4(x) = \frac{a(x + d/c) + b - ad/c}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{(bc - ad)/c^2}{x + d/c}.$$

Une primitive de f_4 sur $\mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$ est

$$g_4(x) = \frac{ax}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \ln |x + d/c|.$$

Les primitives de f_4 sur $\mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$ sont

$$h_4(x) = \begin{cases} g_4(x) + C_1, & x < -d/c \\ g_4(x) + C_2, & x > -d/c \end{cases},$$

où C_1, C_2 sont des constantes (on peut avoir $C_1 \neq C_2$).

$$f_5(x) = |x^2 - 1|.$$

La fonction f_5 est continue sur $\mathbb{R}$ (mais pas dérivable en ± 1 !). Une primitive de f_5 sur $\mathbb{R}$ est

$$g_5(x) = \int_{-1}^x f_5(t) dt = \int_{-1}^x |t^2 - 1| dt.$$

Pour $x \leq -1$ on a

$$g_5(x) = \int_{-1}^x (t^2 - 1) dt = \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_{-1}^x = \frac{x^3}{3} - x - \frac{2}{3}.$$

Pour $x \in [-1, 1]$ on a

$$g_5(x) = \int_{-1}^x (1 - t^2) dt = \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_{-1}^x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}.$$

Pour $x \geq 1$ on a

$$g_5(x) = \int_{-1}^1 (1 - t^2) dt + \int_1^x (t^2 - 1) dt = \frac{4}{3} + \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_1^x = \frac{x^3}{3} - x + 2.$$

Pour conclure les primitives de f_5 sur $\mathbb{R}$ sont $g_5 + C$ où

$$g_5(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x - \frac{2}{3}, & x \leq -1 \\ x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}, & x \in [-1, 1] \\ \frac{x^3}{3} - x + 2, & x \geq 1 \end{cases}.$$

$$f_6(x) = \frac{1}{(x-5)^3}.$$

Une primitive de f_6 sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ est $x \mapsto -\frac{1}{2(x-5)^2}$ et les primitives de f_5 sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ est

$$g_5(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2(x-5)^2} + C_1, & x < 5 \\ -\frac{1}{2(x-5)^2} + C_2, & x > 5 \end{cases}.$$

$$f_7(x) = \ln(4-x).$$

f_7 est définie et continue sur $] -\infty, 4[$. Une primitive de f_7 sur cet intervalle est

$$g_7(x) = \int_0^x f_7(t) dt.$$

On fait un changement de variable $s = 4 - t$:

$$g_7(x) = - \int_4^{4-x} (\ln s) ds = -[s \ln(s) - s]_4^{4-x} = (x-4) \ln(4-x) - x.$$

Les primitives de f_7 sur $] -\infty, 4[$ sont $g_7 + C$.

$$f_8(x) = |x|^{2/5}.$$

f_8 est continue sur $\mathbb{R}$. Une primitive de f_8 est:

$$g_8(x) = \int_0^x f_8(t) dt.$$

Pour $x \leq 0$ on a

$$g_8(x) = \int_0^x (-t)^{2/5} dt = \left[-\frac{5}{7} (-t)^{7/5} \right]_0^x = -\frac{5}{7} (-x)^{7/5}.$$

Pour $x > 0$ on a

$$g_8(x) = \int_0^x (t)^{2/5} dt = \left[\frac{5}{7} (t)^{7/5} \right]_0^x = \frac{5}{7} x^{7/5}.$$

Les primitives de f_8 sur $\mathbb{R}$ sont $g_8 + C$.

Exercice 2.—

a.

$$\int_0^{\pi/2} t \sin(t) dt = [-t \cos(t) + \sin(t)]_0^{\pi/2} = 1.$$

b.

$$\int_0^1 t e^t dt = [t e^t - e^t]_0^1 = 1.$$

c. Pour calculer

$$\int_0^1 x \arctan(x) dx$$

on fait une intégration par parties en posant $u'(x) = x$ (donc $u(x) = x^2/2$) et $v(x) = \arctan(x)$ (donc $v'(x) = 1/(1+x^2)$):

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \arctan(x) dx &= [x^2 \arctan(x)/2]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{dx}{2(1+x^2)} \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + [\arctan(x)/2]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

d. On écrit $x = x+1-1$ puis

$$\int_0^1 \frac{x}{2\sqrt{x+1}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 ((x+1)^{1/2} - (x+1)^{-1/2}) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - 2(x+1)^{1/2} \right]_0^1 = \frac{2-\sqrt{2}}{3}.$$

e. On définit les fonctions u et v de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telles que $u'(x) = 1$, $v(x) = \arctan(x)$, $u(x) = x$ et $v'(x) = 1/(1+x^2)$. On obtient en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^x \arctan(u) du &= [u \arctan(u)]_0^x - \int_0^x \frac{u}{1+u^2} dx \\ &= x \arctan(x) - [\ln(1+t^2)/2]_0^x = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2). \end{aligned}$$

f. On fait un changement de variable en posant $t = \ln u$, $dt = du/u$, $u = e^t$. Ainsi,

$$I_n := \int_1^x \frac{\ln(u)}{u^n} du = \int_0^{\ln x} t e^{(1-n)t} dt.$$

Si $n = 1$ on a $I_1 = \ln(x)$. Pour $n \neq 1$ on fait une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln x} t e^{(1-n)t} dt &= \left[\frac{t e^{(1-n)t}}{1-n} \right]_0^{\ln(x)} - \int_0^{\ln(x)} \frac{e^{(1-n)t}}{1-n} dt \\ &= \frac{x^{1-n} \ln(x)}{1-n} - \left[\frac{e^{(1-n)t}}{(1-n)^2} \right]_0^{\ln(x)} \\ &= \frac{x^{1-n} \ln(x)}{1-n} - \frac{x^{1-n}}{(1-n)^2} + \frac{1}{(1-n)^2}. \end{aligned}$$

Exercice 3.— 1. On définit les fonctions u et v de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ telles que $u'(x) = x \cos(x) + \sin(x)$, $v(x) = \ln(x)$, $u(x) = x \sin(x)$ et $v'(x) = 1/x$. On obtient en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} I_1 = \int_{\pi/2}^{2\pi/3} (x \cos(x) + \sin(x)) \ln(x) dx &= [x \sin(x) \ln(x)]_{\pi/2}^{2\pi/3} - \int_{\pi/2}^{2\pi/3} x \sin(x) \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2\pi}{3} \ln\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{2} \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + [\cos(x)]_{\pi/2}^{2\pi/3} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} \ln\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{2} \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. On définit les fonctions u et v de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ telles que $u'(x) = 1$, $v(x) = \cos(\ln(x))$, $u(x) = x$ et $v'(x) = -\frac{\sin(\ln(x))}{x}$. On obtient en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} I_2 = \int_1^{e^{\pi/2}} \cos(\ln(x)) dx &= [x \cos(\ln(x))]_1^{e^{\pi/2}} + \int_1^{e^{\pi/2}} x \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx \\ &= -1 + \int_1^{e^{\pi/2}} \sin(\ln(x)) dx. \end{aligned}$$

On définit maintenant les fonctions u et v de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ telles que $u'(x) = 1$, $v(x) = \sin(\ln(x))$, $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}$. On obtient en intégrant à nouveau par parties :

$$\begin{aligned} \int_1^{e^{\pi/2}} \sin(\ln(x)) dx &= [x \sin(\ln(x))]_1^{e^{\pi/2}} - \int_1^{e^{\pi/2}} x \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx \\ &= e^{\pi/2} - \int_1^{e^{\pi/2}} \cos(\ln(x)) dx. \end{aligned}$$

On reporte dans l'égalité précédemment obtenue pour obtenir $I_2 = e^{\pi/2} - 1 - I_2$. On a finalement

$$I_2 = \frac{1}{2} (e^{\pi/2} - 1).$$

3. On va chercher à calculer $J_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$. On définit les fonctions u et v de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ telles que $u'(x) = 1$, $v(x) = (\ln(x))^n$, $u(x) = x$ et $v'(x) = n \frac{1}{x} (\ln(x))^{n-1}$. On obtient en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} J_n &= [x (\ln(x))^n]_1^e - \int_1^e n (\ln(x))^{n-1} dx \\ &= e - n J_{n-1}. \end{aligned}$$

On a donc $I_3 = J_3 = e - 3J_2 = e - 3(e - 2J_1) = -2e + 6J_1 = -2e + 6(e - J_0)$. Mais on a $J_0 = \int_1^e 1 dx = e - 1$. On obtient donc

$$I_3 = -2e + 6(e - e + 1) = 6 - 2e.$$

4. On définit les fonctions u et v de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ telles que $u'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $v(x) = x$, $u(x) = \tan(x)$ et $v'(x) = 1$. On obtient en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} I_4 = \int_0^{\pi/4} x \frac{1}{\cos^2(x)} dx &= [x \tan(x)]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan(x) dx \\ &= \frac{\pi}{4} + [\ln(\cos(x))]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

5. On définit les fonctions u et v de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ telles que $u'(x) = \cos(2x)$, $v(x) = x$, $u(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$ et $v'(x) = 1$. On obtient en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} I_5 = \int_0^{\pi/3} x \cos(2x) dx &= [x \frac{\sin(2x)}{2}]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \frac{\sin(2x)}{2} dx \\ &= \frac{\pi}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} + [\frac{\cos(2x)}{4}]_0^{\pi/3} \\ &= \frac{\pi\sqrt{3}}{12} - \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

6. On définit les fonctions u et v de classe C^1 sur $[0, \frac{1}{2}]$ telles que $u'(x) = 1$, $v(x) = \arcsin(x)$, $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On obtient en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} I_6 = \int_0^{1/2} \arcsin(x) dx &= [x \arcsin(x)]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{\pi}{6} + [\sqrt{1-x^2}]_0^{1/2} \\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1. \end{aligned}$$

Exercice 4.—

f est définie sur $]0, +\infty[$. Une primitive de f est :

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x (t^2 - t)(\ln t - 1)dt.$$

On définit les fonctions u et v de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ telles que $u'(t) = t^2 - t$, $v(t) = \ln t - 1$, $u(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}$ et $v'(t) = 1/t$. On obtient en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x f(t)dt = \left[\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) (\ln(t) - 1) \right]_1^x - \int_1^x \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) \frac{1}{t} dt \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) (\ln(x) - 1) + \frac{1}{6} - \int_1^x \left(\frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} \right) dt \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) (\ln(x) - 1) + \frac{1}{6} - \left[\frac{t^3}{9} - \frac{t^2}{4} \right]_1^x \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) (\ln(x) - 1) + \frac{1}{6} - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4} - \frac{5}{36} \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \ln(x) - \frac{4x^3}{9} + \frac{3x^2}{4} + \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

Les primitives de f sur $]0, +\infty[$ sont $F + C$.

La fonction $g(x) = 2x^3 e^{x^2+1}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On définit les fonctions u et v de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telles que $u'(t) = 2te^{t^2+1}$, $v(t) = t^2$, $u(t) = e^{t^2+1}$ et $v'(t) = 2t$. On obtient une primitive de g en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x g(t)dt = \int_0^x t^2(2te^{t^2+1})dt = [t^2 e^{t^2+1}]_0^x - \int_0^x 2te^{t^2+1} dt \\ &= x^2 e^{x^2+1} - [e^{t^2+1}]_0^x \\ &= (x^2 - 1)e^{x^2+1}. \end{aligned}$$

La fonction $h(x) = (x+1)e^{-x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On définit les fonctions u et v de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telles que $u'(t) = e^{-t}$, $v(t) = t+1$, $u(t) = -e^{-t}$ et $v'(t) = 1$. On obtient une primitive de h en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_0^x h(t)dt = \int_0^x (t+1)e^{-t}dt = [-(t+1)e^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t}dt \\ &= -(x+1)e^{-x} + 1 + [-e^{-t}]_0^x \\ &= -(x+1)e^{-x} - e^{-x} + 2 \\ &= -(x+2)e^{-x} + 2. \end{aligned}$$

Les primitives de h sur $\mathbb{R}$ sont $H + C$.

Exercice 5.—

On pose

$$g(x) = f(x-2) = x \arctan \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \right)$$

et on cherche les primitives de g .

La fonction g est définie et continue sur $] -\infty, -1] \cup]1, +\infty[$. On peut étendre par continuité $g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \pi/2$. On cherche à calculer une primitive de g sur $] -\infty, -1[$:

$$G(x) = \int_{-1}^x g(t) dt = \int_{-1}^x t \arctan \left(\sqrt{\frac{t+1}{t-1}} \right) dt.$$

On fait une intégration par parties: $u'(t) = t$, $u(t) = t^2/2$, et $v(t) = \arctan \left(\sqrt{\frac{t+1}{t-1}} \right)$,

$$\begin{aligned} v'(t) &= \left(\sqrt{\frac{t+1}{t-1}} \right)' \frac{1}{1 + \frac{t+1}{t-1}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}} \left(\frac{t+1}{t-1} \right)' \frac{1}{\frac{2t}{t-1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}} \frac{-2}{(t-1)^2} \frac{1}{\frac{2t}{t-1}} \\ &= \frac{1}{2t(1-t)\sqrt{\frac{-1-t}{1-t}}} = \frac{1}{2t\sqrt{t^2-1}}. \end{aligned}$$

En intégrant par parties on obtient (on n'a pas besoin de calculer la constante):

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-1}^x u'(t)v(t) dt = [uv]_{-1}^x - \int_{-1}^x u(t)v'(t) dt \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \right) + C - \int_{-1}^x \frac{t^2}{4t\sqrt{t^2-1}} dt \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \right) + C - \frac{1}{4} \int_{-1}^x \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \right) + C - \frac{1}{4} \sqrt{x^2-1}. \end{aligned}$$

On a que G est dérivable sur $] -\infty, -1[$ et que $G'(x) = g(x)$ pour tout $x < -1$. Comme g est continue à gauche en $x = -1$, il suit que G est aussi dérivable à gauche en $x = -1$.

Ensuite, on cherche à calculer une primitive de g sur $]1, +\infty[$:

$$G(x) = \int_1^x g(t) dt = \int_1^x t \arctan \left(\sqrt{\frac{t+1}{t-1}} \right) dt.$$

On fait une intégration par parties: $u'(t) = t$, $u(t) = t^2/2$, et $v(t) = \arctan\left(\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}\right)$,

$$\begin{aligned} v'(t) &= \left(\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}\right)' \frac{1}{1 + \frac{t+1}{t-1}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}} \left(\frac{t+1}{t-1}\right)' \frac{1}{\frac{2t}{t-1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{t+1}{t-1}}} \frac{-2}{(t-1)^2} \frac{1}{\frac{2t}{t-1}} \\ &= \frac{-1}{2t(t-1)\sqrt{\frac{1+t}{t-1}}} = \frac{-1}{2t\sqrt{t^2-1}}. \end{aligned}$$

On remarque ici que le calcul est un peu différent !

En intégrant par parties on obtient (on n'a pas besoin de calculer la constante):

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_1^x u'(t)v(t)dt = [uv]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t)dt \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right) + C + \int_1^x \frac{t^2}{4t\sqrt{t^2-1}}dt \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right) + C + \frac{1}{4} \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}dt \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right) + C + \frac{1}{4}\sqrt{x^2-1}. \end{aligned}$$

On a que G est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $G'(x) = g(x)$ pour tout $x > 1$. Comme g est continue à droite en $x = 1$, il suit que G est aussi dérivable à droite en $x = 1$.

On conclut que les primitives de f sont les fonctions de la forme

$$F(x) = \begin{cases} \frac{(x+2)^2}{2} \arctan\left(\sqrt{\frac{x+3}{x+1}}\right) + C_1 - \frac{1}{4}\sqrt{x^2+4x+3}, & x \leq -3 \\ \frac{(x+2)^2}{2} \arctan\left(\sqrt{\frac{x+3}{x+1}}\right) + C_2 + \frac{1}{4}\sqrt{x^2+4x+3}, & x \geq -1 \end{cases},$$

où C_1, C_2 sont des constantes (pas nécessairement la même).

Exercice 6.— On commence par déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \frac{x^4}{x^2+1}$. Pour cela, on décompose $x^4 = x^4 - 1 + 1 = (x^2+1)(x^2-1) + 1$ et on obtient

$$\frac{x^4}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}.$$

On en déduit que $F : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan(x)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Puis on définit les fonctions u et v de classe C^1 sur $[0, \sqrt{3}]$ telles que $u'(x) = x^2$, $v(x) = \ln(x^2 + 1)$, $u(x) = \frac{1}{3}x^3$ et $v'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. On obtient en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} x^2 \ln(x^2 + 1) dx &= \left[\frac{1}{3} x^3 \ln(x^2 + 1) \right]_0^{\sqrt{3}} - \frac{2}{3} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^4}{x^2 + 1} dx \\ &= \sqrt{3} \ln(4) - \frac{2}{3} \left[\frac{1}{3} x^3 - x + \arctan(x) \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3} \ln(4) - \frac{2\pi}{9}. \end{aligned}$$

Exercice 7.—

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} \cos(x) \sin^4(x) dx = [\sin^5(x)/5]_0^{\pi/4} = \frac{1}{20\sqrt{2}}.$$

$$I_2 = \int_0^2 (1 + |x - 1|^3) dx = 2 + \int_0^1 (1 - x)^3 dx + \int_1^2 (x - 1)^3 dx = 5/2.$$

$$I_3 = \int_{\pi/4}^0 \tan(x) dx = - \int_0^{\pi/4} \tan(x) dx = [\ln(\cos(x))]_0^{\pi/4} = -\ln(2)/2.$$

$$I_4 = \int_0^{\pi/6} (\sin^3 x + \cos^3 x) dx.$$

On calcule séparément

$$\int_0^{\pi/6} \sin^3 x dx = \int_0^{\pi/6} (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \int_{\sqrt{3}/2}^1 (1 - t^2) dt = \frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

par le changement de variable $u = \cos(x)$, $du = -\sin(x)dx$, et

$$\int_0^{\pi/6} \sin^3 x dx = \int_0^{\pi/6} (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int_0^{1/2} (1 - t^2) dt = \frac{11}{24}$$

par le changement de variable $u = \sin x$, $du = \cos x dx$. On obtient donc $I_4 = \frac{9-3\sqrt{3}}{8}$.

$$I_5 = \int_{-1}^2 \frac{x^2}{4 + x^3} dx = [\ln(4 + x^3)/3]_{-1}^2 = (\ln(12) - \ln(3))/3 = 2 \ln(2)/3.$$

$$I_6 = \int_0^{1/2} \frac{e^{\arctan(2x)}}{1 + 4x^2} dx = \left[\frac{e^{\arctan(2x)}}{2} \right]_0^{1/2} = \frac{e^{\pi/4} - 1}{2}.$$

$$I_7 = \int_0^{1/2} \frac{-x dx}{\sqrt{1 - x^2}} = [\sqrt{1 - x^2}]_0^{1/2} = \frac{\sqrt{3} - 2}{2}.$$

$$\begin{aligned}
I_8 &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\arcsin(x)]_0^1 = \pi/2. \\
I_9 &= \int_0^{-1} x\sqrt{1+x^2} dx = [(1+x^2)^{3/2}/3]_0^{-1} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}. \\
I_{10} &= \int_{-1}^2 |x| dx = \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^2 x dx = [-x^2/2]_{-1}^0 + [x^2/2]_0^2 = 5/2.
\end{aligned}$$

Exercice 8.— 1. On a

$$\begin{aligned}
\int_0^X x^2 \sin(x) dx &= [-x^2 \cos x]_0^X + 2 \int_0^X x \cos x dx \\
&= -X^2 \cos X + 2 \left([x \sin x]_0^X - \int_0^X \sin x dx \right) \\
&= -X^2 \cos X + 2X \sin X + 2 \cos X - 2.
\end{aligned}$$

On conclut que les primitives de ϕ sont $X \mapsto -X^2 \cos X + 2X \sin X + \cos X + C$, avec $C \in \mathbb{R}$ une constante.

2. Si $u = \pi x^{1/3}$ alors $x = \left(\frac{u}{\pi}\right)^3$, $dx = \frac{3}{\pi} \left(\frac{u}{\pi}\right)^2 du$, on a donc¹

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sin(\pi x^{1/3}) dx &= \int_0^\pi \frac{3}{\pi} \left(\frac{u}{\pi}\right)^2 \sin u du \\
&= \frac{3}{\pi^3} \int_0^\pi u^2 \sin u du \\
&= \frac{3}{\pi^3} [-X^2 \cos X + 2X \sin X + 2 \cos X]_0^\pi \\
&= \frac{3}{\pi^3} (\pi^2 - 4).
\end{aligned}$$

Exercice 9.—

$$A = \int_0^1 x \sqrt{3x+1} dx.$$

On pose $z = 3x + 1$, $dz = 3dx$, $x = (z-1)/3$, $x = 0 \leftrightarrow z = 1$, $x = 1 \leftrightarrow z = 4$. On a

$$A = \int_1^4 \frac{z-1}{9} \sqrt{z} dz = \frac{1}{9} \left[\frac{2}{5} z^{5/2} - \frac{2}{3} z^{3/2} \right]_1^4 = \frac{116}{135}.$$

¹Remarquer que les résultats du cours indiquent plutôt qu'en partant du membre de droite de l'égalité qui suit, on tombe sur le membre de gauche: le changement de variable est bien de classe $\mathcal{C}^1$ dans ce sens

$$B = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{e^x}{1 + e^x} \right) dx = [x - \ln(e^x + 1)]_0^1 = 1 - \ln \frac{e + 1}{2}.$$

Pour calculer C , on pose $x = t^2 - 1$, $dx = 2t dt$:

$$C = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2t dt}{1 + t} = [2t - 2 \ln(1 + t)]_0^{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 2 \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Pour calculer D on pose $v = x/(x + 1)$, donc $x = v/(1 - v)$, $dx = dv/(1 - v)^2$:

$$D = \int_{1/3}^{1/2} \frac{(1 - v)^2}{v} \ln(v) \frac{dv}{(1 - v)^2} = \int_{1/3}^{1/2} \frac{\ln(v)}{v} dv.$$

On fait encore un changement de variable $t = \ln(v)$, $dt = dv/v$:

$$D = \int_{-\ln(3)}^{-\ln(2)} t dt = [t^2/2]_{-\ln(3)}^{-\ln(2)} = \frac{(\ln 2)^2 - (\ln 3)^2}{2}.$$

Pour calculer E on pose $t = x^3 + 1$, $dt = 3x^2$:

$$E = \int_2^9 \frac{dt}{3t(t - 1)} = \frac{1}{3} \int_2^9 \left(\frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{3} [\ln(t - 1) - \ln(t)]_2^9 = \frac{\ln(16) - \ln(9)}{3}.$$

Pour calculer F on pose $t = \sqrt{x^2 + 1}$, $dt = \frac{x}{x^2 + 1} dx$, $\frac{x^2}{x^2 + 1} = \frac{t^2 - 1}{t^2}$:

$$F = \int_{\sqrt{2}}^1 (1 - t^{-2}) dt = 1 - \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{2}.$$

Pour calculer G on pose $t = \ln(x^2 + 1)$, $dt = \frac{2x}{x^2 + 1} dx$:

$$G = \int_0^{\ln(10)} \frac{t}{2} dt = \frac{(\ln 10)^2}{4}.$$

Pour calculer H on pose $x = \sin(t)$, $t \in [0, \pi/2]$, $dx = \cos(t) dt$.

$$H = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \frac{\pi}{4} + [\sin(2t)/4]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Pour calculer I on pose $x = \ln(t^2 + 1)$, $dx = \frac{2t}{t^2 + 1} dt$:

$$I = \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2 + 1} dt = 2 - 2 \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 1} = 2 - 2[\arctan(t)]_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Pour calculer J on pose $x = 2 \arctan(u)$, $dx = \frac{2}{1 + u^2} du$. On a

$$\cos(x) = \cos(2 \arctan(u)) = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}.$$

On a utilisé $\cos(2y) = \frac{1-\tan^2 y}{1+\tan^2 y}$. On calcule:

$$J = \int_0^1 \frac{1}{3 + 2\frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2} du = \int_0^1 \frac{2}{5+u^2} du = \frac{2}{\sqrt{5}} \int_0^1 \frac{d(u/\sqrt{5})}{1 + (u/\sqrt{5})^2} = \frac{2}{\sqrt{5}} \arctan(1/\sqrt{5}).$$

Pour calculer K pour $x > 0$ on pose $u = e^{-x}$, $dx = -du/u$:

$$K = \int \frac{-du}{u\sqrt{u^{-2}-1}} = \int \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}} = \arccos(u) + C = \arccos(e^{-x}) + C.$$

Pour calculer L pour $x \in]-\pi/4, 3\pi/4]$ on pose $u = \tan(x/2)$, $dx = \frac{2du}{1+u^2}$:

$$\begin{aligned} L &= \int \frac{1}{\frac{2u+1-u^2}{1+u^2}} \frac{2du}{1+u^2} = \int \frac{2du}{1-u^2+2u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1-u} + \frac{1}{\sqrt{2}-1+u} \right) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2}-1+u}{\sqrt{2}+1-u} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2}-1+\tan(x/2)}{\sqrt{2}+1-\tan(x/2)} \right). \end{aligned}$$

Pour calculer M on pose $x = \sin t$, $dx = \cos(t)dt$. Pour $x \in [0, 1/2]$ on a $t \in [0, \pi/6]$ et $\cos(t) > 0$, donc

$$M = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)} \cos(t)dt = \int_0^{\pi/6} \frac{1-\cos(2t)}{2} dt = \frac{\pi}{12} - [\sin(2t)/4]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Exercice 10.—

Pour calculer I on pose $t = \cos(x)$, $dt = -\sin(x)dx$. On a $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)dx$, donc

$$I = \int_{1/2}^1 2 \frac{t dt}{t+1} = 1 - 2 \int_{1/2}^1 \frac{dt}{1+t} = 1 - 2[\ln(t+1)]_{1/2}^1 = 1 - 2\ln(4/3).$$

Pour calculer I_2 on pose $t = \sin(x)$, $dt = \cos(x)dx$. On a

$$\frac{1}{\sin(2x)} = \frac{\cos(x)}{2\sin(x)\cos^2(x)} = \frac{\cos(x)}{2\sin(x)(1-\sin^2(x))},$$

Puis

$$I_2 = \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{dt}{2t(1-t^2)}. \quad (1)$$

On décompose en éléments simples:

$$\frac{1}{2t(1-t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1-t} + \frac{c}{t+1}.$$

$$\iff a(1-t^2) + b(t^2+t) + c(t-t^2) = 1/2.$$

On trouve $-a + b - c = 0$, $a = 1/2$, $b = -c$, donc $a = 1/2, b = 1/4, c = -1/4$. Avec ces valeurs de a, b, c , on calcule:

$$I_2 = \frac{1}{4} \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{2}{t} + \frac{1}{1-t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{4} [2 \ln(t) - \ln(1-t^2)]_{1/2}^{1/\sqrt{2}} = -\frac{\ln(3)}{4}.$$

On pourra aussi calculer I_2 dans (1) par un changement de variable $u = t^2$, $du = 2t dt$:

$$I_2 = \int_{1/4}^{1/2} \frac{du}{4u(1-u)} = \frac{1}{4} \int_{1/4}^{1/2} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u} \right) du = \frac{1}{4} [\ln(u) - \ln(1-u)]_{1/4}^{1/2} = \frac{\ln(3)}{4}.$$

Pour calculer I_3 on pose $t = \sin(x)$, $dt = \cos(x)dx$:

$$I_3 = \int_0^1 \frac{dt}{6-5t+t^2} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2-t} - \frac{1}{3-t} \right) dt = [\ln(3-t) - \ln(2-t)]_0^1 = \ln(4/3).$$

Exercice 11.—

1. La fonction $f(x) = \frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$. On cherche une primitive de f sur $]0, \pi[$. On pose $u = \sin(x)$, $du = \cos(x)dx$. On a

$$\int \frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)} dx = \int \frac{1-u^2}{u^4} du = \frac{-1}{3u^3} + \frac{1}{u} + C = \frac{-1}{3\sin^3(x)} + \frac{1}{\sin(x)} + C.$$

La fonction $F(x) = \frac{-1}{3\sin^3(x)} + \frac{1}{\sin(x)}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$ vérifie $F'(x) = f(x)$. Par conséquent, les primitives de f sur $D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$ sont les fonctions de la forme: $F(x) + C_k$ sur chaque intervalle $I_k \subset D$.

2. La fonction $g(x) = \cos^3(x) \sin^4(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Pour chercher une primitive de g on pose $u = \sin(x)$, $du = \cos(x)dx$:

$$G(x) = \int (1-u^2)u^4 du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C = \frac{\sin^5(x)}{5} - \frac{\sin^7(x)}{7} + C.$$

3. La fonction $h(x) = \frac{1}{2+\sin(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Pour chercher une primitive de h sur $]-\pi, \pi[$ on pose $u = \tan(x/2)$, $dx = 2du/(1+u^2)$:

$$H(x) = \int \frac{2du}{(1+u^2)(2+\frac{2u}{1+u^2})} = \int \frac{du}{1+u+u^2} = \int \frac{du}{(u+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}.$$

On pose $u + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}v$, $du = \frac{\sqrt{3}}{2}dv$:

$$H(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dv}{1+v^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(v) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\tan(x/2)+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

On vérifie bien que H est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus (1 + 2\mathbb{Z})\pi$ et $H'(x) = h(x)$ pour tout $x \in D$. Comme h est continue sur $\mathbb{R}$, le TAF assure que H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $H'(x) = h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On conclut que les primitives de h sur $\mathbb{R}$ sont

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2 \tan(x/2) + 1}{\sqrt{3}} \right) + C.$$

Exercice 12.—

1. Soient deux réels $a < b$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, f admet des primitives sur l'intervalle $[a, b]$ et, en appelant F l'une d'elles, on a :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Comme F est de plus de classe $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ (car dérivable sur $[a, b]$ de dérivée f continue sur $[a, b]$), on a d'après le TAF l'existence d'un réel $c \in [a, b]$ tel que

$$F(b) - F(a) = (b - a)F'(c) \underset{F'=f}{=} (b - a)f(c) \quad \text{d'où} \quad \int_a^b f(t) dt = (b - a)f(c) !$$

2. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, alors pour tout $x > 0$, $f \in \mathcal{C}([0, x], \mathbb{R})$ et donc par ce qui précède :

$$\text{pour tout } x > 0, \exists c_x \in [0, x] \text{ tel que } \int_0^x f(t) dt = (x - 0)f(c_x) = xf(c_x).$$

Ainsi $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = f(c_x)$ et à la limite $x \rightarrow 0^+$, comme $c_x \in [0, x] \rightarrow 0^+$ en vertu du théorème des gendarmes, il vient par continuité de f en 0 :

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = f(c_x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} f(0).$$

Exercice 13.— Dans ce qui suit, on note F la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction continue f , qui s'annule en 0. Autrement dit, on a $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ et F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1. On écrit $\phi_1(x) = F(x^2)$. La fonction ϕ_1 est donc la composée de F et de la fonction carrée. Elle est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\phi_1'(x) = 2xF'(x^2) = 2xf(x^2).$$

2. On écrit $\phi_2(x) = F(\sin(x)) - F(x)$. La fonction $F \circ \sin$ est la composée de 2 fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, elle est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et ϕ_2 aussi par conséquent. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \phi_2'(x) &= \cos(x)F'(\sin(x)) - F'(x) \\ &= \cos(x)f(\sin(x)) - f(x). \end{aligned}$$

3. On commence par réécrire $\phi_3(x)$. Pour $x \neq 0$, on fait le changement de variable $u = tx$ et on a :

$$\phi_3(x) = \frac{1}{x} \int_{x^2}^{x^3} f(u) du = \frac{F(x^3) - F(x^2)}{x}$$

et la fonction ϕ_3 est clairement de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

Pour $x = 0$, on a $\phi_3(0) = 0$ par définition de ϕ_3 .

On montre d'abord que la fonction ϕ_3 est continue en $x = 0$. Soit $x \neq 0$. Par le théorème des accroissements finis sur $[x^3, x^2]$ ou $[x^2, x^3]$ suivant que $0 < x < 1$ ou $-1 < x < 0$, il existe c_x entre x^3 et x^2 tel que

$$\frac{F(x^3) - F(x^2)}{x} = \frac{(x^3 - x^2)F'(c_x)}{x} = (x^2 - x)f(c_x).$$

Comme f est continue, quand on fait tendre x vers 0, c_x tend aussi vers 0 et on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} \phi_3(x) = 0f(0) = 0 = \phi_3(0)$.

On montre maintenant que ϕ_3 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Il suffit de montrer que la limite de $\phi'_3(x)$ (pour $x \neq 0$) existe quand x tend vers 0. On a, pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \phi'_3(x) &= \frac{\left(3x^2 f(x^3) - 2x f(x^2)\right)x - \left(F(x^3) - F(x^2)\right)}{x^2} \\ &= 3x f(x^3) - 2f(x^2) - \frac{F(x^3) - F(x^2)}{x^2} \\ &= 3x f(x^3) - 2f(x^2) - \frac{(x^3 - x^2)F'(c_x)}{x^2} \\ &= 3x f(x^3) - 2f(x^2) - (x - 1)f(c_x). \end{aligned}$$

Quand x tend vers 0, $\phi'_3(x)$ tend vers $-2f(0) - (-1)f(0) = -f(0)$. On en déduit que ϕ_3 est dérivable en $x = 0$, que $\phi'_3(0) = -f(0)$ et même que ϕ'_3 est continue en $x = 0$. Donc ϕ_3 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (on rappelle qu'on savait déjà que ϕ_3 était de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$!)

Exercice 14.— 1. La fonction racine carrée est continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$. Les fonctions arcsin et arccos sont continues sur $[0, 1]$. On en déduit que les fonctions composées $u : t \mapsto \arcsin(\sqrt{t})$ et $v : t \mapsto \arccos(\sqrt{t})$ sont continues sur $[0, 1]$ et possèdent donc respectivement des primitives sur $[0, 1]$ F et G de classe C^1 . Comme les fonctions $\sin^2$ et $\cos^2$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[0, 1]$, on en déduit que la fonction

$$f = F \circ \sin^2 + G \circ \cos^2$$

est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. Pour $x \in [0, \pi/2]$ on a $\sin(x) \geq 0$, $\cos(x) \geq 0$, et $\arcsin(\sin(x)) = \arccos(\cos(x)) = x$,

ainsi

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= F'(\sin^2(x)).2\cos(x)\sin(x) - G'(x).2\sin(x)\cos(x) \\
 &= \sin(2x)\left(u(\sin^2(x)) - v(\cos^2(x))\right) \\
 &= \sin(2x)\left(\arcsin(\sin(x)) - \arccos(\cos(x))\right) \\
 &= \sin(2x)(x - x) = 0.
 \end{aligned}$$

Pour $x \in [\pi/2, \pi]$ on a $\sin(x) \geq 0 \geq \cos(x)$ et $\arcsin(\sin(x)) = \pi - x$, $\arccos(-\cos(x)) = \pi - x$, ainsi

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \sin(2x)\left(\arcsin(\sin(x)) - \arccos(-\cos(x))\right) \\
 &= \sin(2x)(\pi - x - (\pi - x)) = 0.
 \end{aligned}$$

On en déduit que f est constante sur $[0, \pi]$. Comme $\arcsin(t) + \arccos(t) = \pi/2$ pour tout $t \in [-1, 1]$, il suit que

$$f(\pi/4) = \int_0^{\pi/4} (\arcsin(\sqrt{t}) + \arccos(\sqrt{t})) dt = \pi/4.$$

On obtient donc $f(x) = f(\pi/4) = \pi/4$ pour tout $x \in [0, \pi]$. On remarque également que f est π -périodique car $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ et $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$, donc $\sin^2(x + \pi) = \sin^2(x)$ et $\cos^2(x + \pi) = \cos^2(x)$, puis $f(x + \pi) = f(x)$. Il suit que f est constante sur $\mathbb{R}$ et elle vaut $\pi/4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 15.— 1. On multiplie l'égalité par $x \neq 0$

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}.$$

On obtient

$$\frac{1}{1+x^2} = a + \frac{x(bx+c)}{1+x^2}$$

et on fait tendre x vers 0. Il en résulte que $a = 1$. Si on fait tendre x vers $+\infty$ dans cette dernière égalité, on obtient $0 = a + b$ car $\frac{x(bx+c)}{1+x^2} = \frac{b+c/x}{1/x^2+1}$ tend vers b quand x tend vers $+\infty$. On a donc $b = -a = -1$. Pour déterminer c , il suffit de choisir $x = 1$ dans la première égalité. On a $\frac{1}{2} = 1 + \frac{-1+c}{2}$ donc $c = 0$. On obtient la décomposition

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{1+x^2}.$$

Il est vrai que cette égalité était un peu évidente. Disons que la méthode était intéressante.

2. On définit les fonctions u et v de classe C^1 sur $[\alpha, 1]$ telles que $u'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$, $v(x) =$

$\ln(x)$, $u(x) = \frac{-1/2}{1+x^2}$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$. On obtient en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} \ln(x) dx &= \left[\frac{-1/2}{1+x^2} \ln(x) \right]_{\alpha}^1 + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^1 \frac{1}{x(1+x^2)} dx \\ &= \frac{\ln(\alpha)}{2(1+\alpha^2)} + \frac{1}{2} [\ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)]_{\alpha}^1 \\ &= \frac{\ln(\alpha)}{2(1+\alpha^2)} - \frac{\ln(2)}{4} - \frac{\ln(\alpha)}{2} + \frac{\ln(1+\alpha^2)}{4} \\ &= -\frac{\alpha^2 \ln(\alpha)}{1+\alpha^2} - \frac{\ln(2)}{4} + \frac{\ln(1+\alpha^2)}{4}. \end{aligned}$$

On rappelle que $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha^2 \ln(\alpha) = 0$. On en déduit que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{\alpha}^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} \ln(x) dx = -\frac{\ln(2)}{4}.$$

Exercice 16.—

1. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a}{x+1} + \frac{\lambda(2x+2) + \mu}{x^2+2x+5} \\ \iff \frac{x}{x^3+3x^2+7x+5} &= \frac{a}{x+1} + \frac{\lambda(2x+2) + \mu}{x^2+2x+5} \\ \iff \frac{x}{x^3+3x^2+7x+5} &= \frac{a(x^2+2x+5) + \lambda(2x+2)(x+1) + \mu(x+1)}{x^3+3x^2+7x+5} \\ \iff x &= (a+2\lambda)x^2 + (2a+4\lambda+\mu)x + 5a+2\lambda+\mu. \end{aligned}$$

On obtient $a+2\lambda=0$, $2a+4\lambda+\mu=1$ et $5a+2\lambda+\mu=0$. Ensuite, on utilise la méthode du pivot appris en MDD152 pour trouver $a=-1/4$, $\mu=1$ et $\lambda=1/8$. Ainsi

$$f(x) = \frac{-1}{4(x+1)} + \frac{1}{8} \frac{2x+2}{x^2+2x+5} + \frac{1}{(x+1)^2+4}.$$

Une primitive de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ est

$$F(x) = \int f(x) dx = -\frac{\ln|x+1|}{4} + \frac{\ln(x^2+2x+5)}{8} + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Exercice 17.—

1. On a

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1 + 2x + 2 + 2}{x^2 - 1} = 1 + \frac{2}{x - 1} + \frac{2}{(x - 1)(x + 1)} \\ &= 1 + \frac{2}{x - 1} + \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right) \\ &= 1 + \frac{3}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}. \end{aligned}$$

Une primitive de f_1 sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ est

$$\int f(x) dx = x + 3 \ln |x - 1| - \ln |x + 1|.$$

Les primitives de f_1 sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ sont

$$F_1(x) = \begin{cases} x + 3 \ln |x - 1| - \ln |x + 1| + C_1, & x < -1, \\ x + 3 \ln |x - 1| - \ln |x + 1| + C_2, & -1 < x < 1, \\ x + 3 \ln |x - 1| - \ln |x + 1| + C_3, & x > 1 \end{cases}.$$

2. On a que $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$. On cherche a, b, c, d tels que

$$f_2(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x + 2} + cx + d.$$

Bien sûr qu'on peut regrouper les termes et identifier les coefficients pour trouver a, b, c, d . Ici on s'offre une autre méthode. On divise par x en fait tendre $x \rightarrow +\infty$ pour trouver c :

$$\frac{f_2(x)}{x} = \frac{x^3 + x + 1}{x^3 + 3x^2 + 2x} \rightarrow 1,$$

et

$$\frac{1}{x} \left(\frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x + 2} + cx + d \right) \rightarrow c,$$

donc $c = 1$. Ensuite on regarde $g(x) = f_2(x) - x$:

$$g(x) = \frac{-3x^2 - x + 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x + 2} + d.$$

En faisant $x \rightarrow +\infty$ on obtient $d = -3$. On regarde $h(x) = g(x) + 3$:

$$h(x) = \frac{8x + 7}{x^2 + 3x + 2} = \frac{8x + 7}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x + 2}.$$

On a $a = \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1)h(x) = -1$ et $b = \lim_{x \rightarrow -2} (x + 2)h(x) = 9$. Ainsi,

$$f_2(x) = -\frac{1}{x + 1} + \frac{9}{x + 2} + x - 3.$$

On vérifie bien que cette identité est vraie par un calcul direct.

Une primitive de f_2 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$ est

$$\int f_2(x)dx = -\ln|x+1| + 9\ln|x+1| + \frac{x^2}{2} - 3x.$$

Les primitives de f_2 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$ sont

$$F_2(x) = \begin{cases} -\ln|x+1| + 9\ln|x+1| + \frac{x^2}{2} - 3x + C_1, & x < -2 \\ -\ln|x+1| + 9\ln|x+1| + \frac{x^2}{2} - 3x + C_2, & -2 < x < -1 \\ -\ln|x+1| + 9\ln|x+1| + \frac{x^2}{2} - 3x + C_3, & x > -1 \end{cases}.$$

3. On cherche a, b, c tels que

$$f_3(x) = \frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}.$$

On applique la même méthode qu'avant pour trouver $a = 1/2$, $b = -1/2$, $c = 1/2$. Ainsi

$$f_3(x) = \frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{2x} + \frac{-1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x-2)}.$$

Une primitive de f_3 sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$ est

$$\int f_3(x)dx = \frac{1}{2} (\ln|x| - \ln|x-1| + \ln|x+1|).$$

Les primitives de f_3 sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$ sont

$$F_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} (\ln|x| - \ln|x-1| + \ln|x+1|) + C_1, & x < 0 \\ \frac{1}{2} (\ln|x| - \ln|x-1| + \ln|x+1|) + C_2, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} (\ln|x| - \ln|x-1| + \ln|x+1|) + C_3, & 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2} (\ln|x| - \ln|x-1| + \ln|x+1|) + C_4, & 2 < x \end{cases}.$$

Exercice 18.— On a $\frac{3x^2}{(1+x^2)(1+4x^2)} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+4x^2}$.

Donc,

$$\begin{aligned} I(X) &= \int_0^X \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+4x^2} \right) dx \\ &= \int_0^X \frac{1}{1+x^2} dx - \int_0^X \frac{1}{1+4x^2} dx \\ &= \arctan X - \frac{1}{2} \arctan(2X) \end{aligned}$$

Lorsque $X \rightarrow +\infty$, $I(X)$ a donc pour limite $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 19.—

On pose

$$x_n = \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right)^{1/n} > 1.$$

En prenant $\ln$ on obtient

$$\ln(x_n) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right)$$

est la somme de Riemann à droite d'ordre n de la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ sur $[0, 1]$. Comme f est continue sur $[0, 1]$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(x_n) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \ln(x+1) dx = [(x+1) \ln(x+1) - x]_0^1 = 2 \ln(2) - 1.$$

On pose

$$y_n = \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right) \right)^{1/n} > 1.$$

Pour chaque $N \in \mathbb{N}^*$ fixé, et $n \geq N$, on a

$$0 < \ln y_n \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{Nn} \right) \right) = z_n.$$

On remarque que z_n est la somme de Riemann à droite d'ordre n de la fonction $f_N(x) = \ln(1+x/N)$ sur $[0, 1]$. Comme f_N est croissante sur $[0, 1]$, on a

$$0 \leq \int_0^1 f_N(x) dx \leq \int_0^1 f_N(1) dx = f_N(1) = \ln(1+1/N) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

En vertu du théorème des gendarmes on a $\int_0^1 f_N(x) dx \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \int_0^1 f_N(x) dx \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

En vertu du théorème des gendarmes on obtient $\ln(y_n) \rightarrow 0$, donc $y_n \rightarrow 1$.

Exercice 20.—

1. a) On a d'abord pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2, \end{aligned}$$

le calcul de la limite étant une conséquence de la continuité de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur $[0, 1]$ et des résultats du cours sur les sommes de Riemann (la somme précédente étant sa somme de Riemann à droite d'ordre n).

b) On effectue de même le second calcul (en utilisant la continuité de $x \mapsto \frac{1}{(1+x)^\alpha}$ sur $[0, 1]$):

$$\sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p^\alpha} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1 + \frac{k}{n})^\alpha} = \underbrace{\frac{n^{1-\alpha}}{n}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } \alpha > 1} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1 + \frac{k}{n})^\alpha}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^\alpha} dx} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

2. Montrons d'abord la première inégalité, c-à-d que $x - \sin x \geq 0$ pour tout $x \geq 0$. On étudie pour cela la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x - \sin x$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ de dérivée $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ donc est croissante. Ainsi, $f(x) \geq f(0) = 0$ pour tout $x \geq 0$, d'où l'inégalité voulue $\sin x \leq x$ pour tout $x \geq 0$.

En intégrant cette dernière inégalité entre 0 et y pour $y \geq 0$ quelconque, on obtient la deuxième inégalité :

$$\int_0^y \sin x \, dx \leq \int_0^y x \, dx \quad \text{c-à-d} \quad -\cos y + 1 \leq \frac{y^2}{2} \quad \text{d'où} \quad \cos y \geq 1 - \frac{y^2}{2}.$$

Enfin, en intégrant cette dernière inégalité entre 0 et z pour $z \geq 0$ quelconque, on obtient la troisième inégalité :

$$\int_0^z (1 - \frac{y^2}{2}) \, dy \leq \int_0^z \cos y \, dy \quad \text{c-à-d} \quad z - \frac{z^3}{6} \leq \sin z.$$

3. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, $n+1 \leq p \leq 2n$,

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{6p^3} \leq \sin\left(\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$$

donc en sommant entre $n+1$ et $2n$,

$$\sum_{p=n+1}^{2n} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{6p^3} \right) = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} - \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{6p^3} \leq \sum_{p=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{1}{p}\right) \leq \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p}.$$

D'après la question 1, on sait de plus que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} = \ln 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p^3} = 0$, d'où la limite suivante en vertu du théorème des gendarmes :

$$\sum_{p=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{1}{p}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2.$$

Exercice 21.— 1. Puisque $1 + (\tan x)^2$ est une expression de la dérivée de la fonction tangente, l'expression proposée est de la forme $u(x)^n u'(x)$ et une primitive en est $x \mapsto \frac{(\tan x)^{n+1}}{n+1}$.

2. On trouve immédiatement $I_0 = \pi/4$. La fonction $\tan$ ayant son expression de la forme $-u'/u$ (où u est la fonction $\cos$), une de ses primitives sur $] -\pi/2, \pi/2[$ a pour expression $-\ln(\cos x)$. On obtient donc $I_1 = -\ln(\cos(\pi/4)) = \ln(2)/2$. La primitive donnée dans la première question aboutit à l'égalité $I_n + I_{n+2} = 1/(n+1)$.

3. Comme la fonction intégrée $x \mapsto (\tan x)^n$ est positive sur le segment d'intégration, on obtient immédiatement l'inégalité $I_n \geq 0$. Le but de cette question est de montrer que $I_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Il suffit donc de majorer I_n par une suite tendant clairement vers 0. Comme $I_{n+2} \geq 0$, on a par la question précédente

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1},$$

ce qui nous permet de conclure.

4. On peut d'après la question 2) écrire $S_n = (I_0 + I_2) - (I_2 + I_4) + \cdots + (-1)^n (I_{2n} + I_{2n+2}) = I_0 + (-1)^n I_{2n+2}$ qui a pour limite $I_0 = \pi/4$.

5. Puisque $1/(k+1) = 2/(2k+2)$ on a de même $T_n = 2(I_1 + I_3) - 2(I_3 + I_5) + \cdots + (-1)^n 2(I_{2n+1} + I_{2n+3}) = 2I_1 + (-1)^n 2I_{2n+3}$ qui a pour limite $2I_1 = \ln 2$.

Exercice 22.—

1. La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ donc y admet des primitives. En particulier, sa primitive s'annulant en 0 est donnée, d'après le théorème fondamental de l'analyse, par $I \ni x \mapsto \int_0^x \ln(1+t) dt$. Or on a pour $x \in I$:

$$\begin{aligned} \int_0^x \ln(1+t) dt & \stackrel{\text{IPP}}{=} \begin{cases} u = \ln(1+t), u' = \frac{1}{1+t} \\ v' = 1, v = 1+t \end{cases} \left[(1+t) \ln(1+t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{1+t}{1+t} dt \\ & = (1+x) \ln(1+x) - x. \end{aligned}$$

2. On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $u_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}}$.

a) On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\ln u_n &= \frac{1}{n} \left(\ln \left(\frac{(2n)!}{n!} \right) - n \ln n \right) = \frac{1}{n} \left(\ln (2n \times (2n-1) \times \cdots \times (n+1)) - n \ln n \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n (\ln(n+k) - \ln n) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right).\end{aligned}$$

b) La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur $[0, 1]$ et sa somme de Riemann à droite d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ sur $[0, 1]$ n'est autre que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{k}{n})$. On a donc en particulier d'après le résultat du cours sur les sommes de Riemann :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(1+t) dt \underset{\text{Q.1.}}{=} 2 \ln 2 - 1 = \ln 4 - 1.$$

Par continuité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on en déduit donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \exp(\ln u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(\ln 4 - 1) = \frac{4}{e}.$$

Exercice 23.—

1. Le changement de variable $t = \pi/2 - u$ effectué dans I_n donne

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt = \int_{\pi/2}^0 \sin^n(\pi/2 - u) - du = \int_0^{\pi/2} \cos^n u du = J_n.$$

2. On intègre par parties :

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin t \sin^{n-1} t dt \\ &= \left[-\cos t \sin^{n-1} t \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos t)(n-1)(\cos t) \sin^{n-2} t dt \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t) \sin^{n-2} t dt \\ &= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n.\end{aligned}$$

On a donc bien $n I_n = (n-1) I_{n-2}$.

3. Montrons par récurrence sur $p \geq 1$ la relation

$$I_{2p} = \left(\prod_{i=1}^p \frac{2i-1}{2i} \right) \frac{\pi}{2}.$$

Si $p = 1$ il s'agit de montrer que $I_2 = \pi/4$. C'est bien le cas :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{4}.$$

Supposons maintenant la relation démontrée au rang $p \geq 1$. D'après l'égalité obtenue à la question précédente, on a $I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on trouve

$$I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} = \frac{2p+1}{2p+2} \left(\prod_{i=1}^p \frac{2i-1}{2i} \right) \frac{\pi}{2} = \left(\prod_{i=1}^{p+1} \frac{2i-1}{2i} \right) \frac{\pi}{2}.$$

C'est bien la relation attendue au rang $p+1$.

On procède de façon similaire pour le calcul de I_n avec n impair.

4. Il suffit d'observer que $\sin t \in [0, 1]$ pour tout $t \in [0, \pi/2]$ ce qui implique

$$\forall t \in [0, \pi/2] \quad \sin^{2p+1} t \leq \sin^{2p} t \leq \sin^{2p-1} t.$$

En intégrant ces inégalités sur l'intervalle on trouve $I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1}$. Ces inégalités sont strictes. Supposons par l'absurde qu'il existe $n \geq 0$ tel que $I_{n+1} = I_n$. Dans ce cas, l'intégrale de $t = 0$ à $t = \pi/2$ de la fonction $\phi(t) = \sin^n t - \sin^{n+1} t$, qui est positive sur $[0, \pi/2]$, est nulle. On doit donc nécessairement avoir $\phi(t) = 0$ pour tout $t \in [0, \pi/2]$. Or, $\phi(\pi/6) = 2^{-n-1} > 0$ d'où une contradiction.

5. On trouve

$$\frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}} = \frac{2p+1}{2p} \longrightarrow 1.$$

6. On observe que l'inégalité du 4. donne

$$1 < \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} < \frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}}.$$

Le résultat souhaité est donc une conséquence de la question précédente et du théorème des gendarmes.

7. En explicitant $I_{2p} I_{2p+1}^{-1}$ on trouve :

$$\frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = (2p+1) \left(\prod_{i=1}^p \frac{2i-1}{2i} \right)^2 \frac{\pi}{2}.$$

Puisque ceci tend vers 1 on en déduit en prenant l'inverse :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2}{2p+1} \left(\prod_{i=1}^p \frac{2i}{2i-1} \right)^2 = \pi .$$

En prenant le produit avec $\frac{2p+1}{2p}$, qui tend aussi vers 1, on en déduit par produit de limites :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \left(\prod_{i=1}^p \frac{2i}{2i-1} \right)^2 = \pi .$$

C'est bien la première limite recherchée. On en déduit la seconde en observant que l'on peut reformuler les produits de la façon suivante :

$$\prod_{i=1}^p (2i) = 2^p p! , \quad \prod_{i=1}^p (2i-1) = (2p)! \prod_{i=1}^p \frac{1}{2i} = \frac{(2p)!}{2^p p!} .$$