

Module MDD151 : Calcul intégral

Corrigé de la feuille d'exercices numéro 3

Formules de Taylor

Exercice 1.— Corrigé.

Dans cet exercice il s'agit d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à 4 fonctions : le signe de l'intégrale permet d'établir les inégalités.

1. Démontrons que $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Notons f_1 la fonction qui à tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ associe $\sin x$ et calculons ses dérivées successives, cette fonction étant infiniment dérivable :

$$f_1'(x) = \cos x, \quad f_1''(x) = -\sin x, \quad f_1^{(3)}(x) = -\cos x, \quad f_1^{(4)}(x) = \sin x = f_1(x).$$

Ainsi la formule de Taylor appliquée à f_1 entre $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et 0 à l'ordre 3 s'écrit :

$$f_1(x) = f_1(0) + x f_1'(0) + \frac{x^2}{2!} f_1''(0) + \frac{x^3}{3!} f_1^{(3)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} f_1^{(4)}(t) dt.$$

Ce qui donne en remplaçant les dérivées de f_1 en 0 par leurs valeurs :

$$f_1(x) = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} \sin(t) dt.$$

Or pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a l'inégalité $\sin t \geq 0$ et comme il en est de même de $(x-t)$ car $t \leq x$ donc $\frac{(x-t)^3}{3!} \sin(t) \geq 0$ et donc par positivité de l'intégrale on obtient que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} \sin(t) dt \geq 0$$

et donc $f_1(x) \geq x - \frac{x^3}{3!}$. (Le polynôme $x - \frac{x^3}{3!}$ étant le polynôme de Taylor de f_1 à l'ordre 3.)

L'autre inégalité s'obtient en écrivant la formule de Taylor à l'ordre 1 de f_1 , on obtient alors :

$$f_1(x) = f_1(0) + x f_1'(0) + \int_0^x (x-t) f_1^{(2)}(t) dt = x + \int_0^x (x-t)(-\sin t) dt.$$

Or pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $t \in [0, x]$, $(x-t)(-\sin t) \leq 0$ donc par positivité de l'intégrale on obtient bien que :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \int_0^x (x-t)(-\sin(t)) dt \leq 0$$

donc $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin(x) \leq x$.

2. Démontrons que $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$.

On procède de la même manière en posant f_2 la fonction définie pour tout $x \geq 0$ par $f_2(x) = \ln(1+x)$. La fonction f_2 est infiniment dérivable pour tout $x \geq 0$, calculons alors ses dérivées successives :

$$f_2'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f_2''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f_2^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

Ainsi :

$$f_2(0) = 0, \quad f_2'(0) = 1, \quad f_2''(0) = -1.$$

La formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 2 entre 0 et x devient, en remplaçant les dérivées successives de f_2 par ses valeurs en 0 :

$$f_2(x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \frac{2}{(1+t)^3} dt.$$

Or pour tout $x \geq 0$ et pour tout $t \in [0, x]$ on a $\frac{(x-t)^2}{2} \frac{2}{(1+t)^3} \geq 0$ et donc par positivité de l'intégrale on obtient que :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \frac{2}{(1+t)^3} dt \geq 0.$$

On en déduit alors que

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x).$$

Pour obtenir l'autre inégalité il suffit d'appliquer la formule de Taylor à l'ordre 1 à f_2 entre 0 et x ce qui donne, en remplaçant $f_2(0)$ et $f_2'(0)$ par leur valeur :

$$f_2(x) = 0 + x + \int_0^x (x-t) \left(-\frac{1}{(1+t)^2}\right) dt.$$

Or pour tout $x \geq 0$ et pour tout $t \in [0, x]$ on a $(x-t) \left(-\frac{1}{(1+t)^2}\right) \leq 0$ donc

$$\int_0^x (x-t) \left(-\frac{1}{(1+t)^2}\right) dt \leq 0$$

ce qui permet de conclure que :

$$\ln(1+x) \leq x.$$

3. Démontrons que $1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x$ pour tout $x \geq 0$.

La fonction exponentielle est infiniment dérivable et a toutes ses dérivées en tout point $x \in \mathbb{R}$ égalent à e^x . On applique donc la formule de Taylor avec reste intégral à l'exponentielle à l'ordre 2 entre 0 et x , pour tout $x \geq 0$. On obtient :

$$e^x = e^0 + x e^0 + \frac{x^2}{2} e^0 + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} e^t dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} e^t dt.$$

Or pour tout $x \geq 0$ et pour tout $t \in [0, x]$ on a $\frac{(x-t)^2}{2} e^t \geq 0$ donc par positivité de l'intégrale,

$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} e^t dt \geq 0$$

et donc $1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x$ pour tout $x \geq 0$.

4. Démontrons que $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$ pour tout $x \geq 0$.

Notons f_4 la fonction qui a tout $x \geq 0$ associe $f_4(x) = \sqrt{1+x}$. La fonction f_4 est infiniment dérivable pour tout $x \geq 0$,

$$f_4'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, f_4''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, f_4^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \\ \text{et } f_4^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}(1+x)^{-\frac{7}{2}}.$$

Ainsi $f_4(0) = 1$, $f_4'(0) = \frac{1}{2}$, $f_4''(0) = -\frac{1}{4}$, $f_4^{(3)}(0) = \frac{3}{8}$, $f_4^{(4)}(0) = -\frac{15}{16}$. En appliquant à f_4 la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et x à l'ordre 3 on obtient alors :

$$f_4(x) = f_4(0) + x f_4'(0) + \frac{x^2}{2!} f_4''(0) + \frac{x^3}{3!} f_4^{(3)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} f_4^{(4)}(t) dt.$$

Soit

$$f_4(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} \left(-\frac{15}{16}(1+t)^{-\frac{7}{2}}\right) dt.$$

Or pour tout $x \geq 0$ et pour tout $t \in [0, x]$ on a

$$\frac{(x-t)^3}{3!} \left(-\frac{15}{16}(1+t)^{-\frac{7}{2}}\right) \leq 0$$

donc pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$. En appliquant à f_4 la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et x à l'ordre 2 on obtient de la même manière :

$$f_4(x) = f_4(0) + x f_4'(0) + \frac{x^2}{2!} f_4''(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} f_4^{(3)}(t) dt$$

soit

$$f_4(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} \frac{3}{8}(1+t)^{-\frac{5}{2}} dt$$

et comme pour tout x positif et tout $0 \leq t \leq x$ on a l'inégalité $\frac{(x-t)^2}{2!} f_4^{(3)}(t) \geq 0$ nous en déduisons que

$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} f_4^{(3)}(t) dt \geq 0$$

et donc que

$$\forall x \geq 0, \quad 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x}.$$

Exercice 2.— Corrigé.

Dans cet exercice il s'agit d'utiliser la formule de Taylor Lagrange avec reste intégral et de chercher une majoration du reste conduisant à l'encadrement demandé.

1. Démontrons la majoration suivante pour tout réel x :

$$\left| \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \right| \leq \frac{|x|^5}{5!}$$

Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et x à l'ordre 4 à la fonction f définie par $f(x) = \cos x$ pour tout réel x . Pour cela calculons les dérivées successives de f en tout réel x :

$$f'(x) = -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x, \quad f^{(3)}(x) = \sin x, \quad f^{(4)}(x) = \cos x = f(x).$$

Ainsi nous obtenons :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) + \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} f^{(5)}(t) dt$$

soit

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} (-\sin t) dt.$$

D'où l'égalité :

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} = \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} (-\sin t) dt$$

qui entraîne l'inégalité :

$$\left| \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} \right| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} (-\sin t) dt \right|.$$

Nous utilisons maintenant l'inégalité triangulaire que l'on rappelle ici : Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit a et b deux nombres de I tels que $a \leq b$ alors :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Supposons que $x \geq 0$, alors comme pour tout t réel $|\sin t| \leq 1$ on a donc $\left| \frac{(x-t)^4}{4!} (-\sin t) \right| \leq \frac{(x-t)^4}{4!}$ et par inégalité triangulaire, ($x \geq 0$)

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} (-\sin t) dt \right| \leq \int_0^x \left| \frac{(x-t)^4}{4!} (-\sin t) \right| dt \leq \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} dt.$$

Calculons maintenant $\int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} dt$: Une primitive de $\frac{(x-t)^4}{4!}$ est $-\frac{(x-t)^5}{5!}$ donc

$$\int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} dt = -\frac{(x-x)^5}{5!} + \frac{(x-0)^5}{5!} = \frac{x^5}{5!}.$$

Donc $\forall x \geq 0$ alors $\left| \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} \right| \leq \frac{x^5}{5!}$.

Supposons maintenant que $x < 0$. Or si $x < 0$ alors $-x > 0$ et d'après le résultat précédent nous avons :

$$\left| \cos(-x) - 1 + \frac{(-x)^2}{2} - \frac{(-x)^4}{4!} \right| \leq \frac{(-x)^5}{5!} = \left| \frac{x^5}{5!} \right|.$$

Or $\cos(-x) = \cos x$ d'où le résultat.

Remarque : nous pouvons aussi procéder de la manière suivante en écrivant que

$$\int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} (-\sin t) dt = - \int_x^0 \frac{(x-t)^4}{4!} (-\sin t) dt$$

Appliquons l'inégalité triangulaire à cette intégrale :

$$\left| - \int_x^0 \frac{(x-t)^4}{4!} (-\sin t) dt \right| \leq \int_x^0 \left| \frac{(x-t)^4}{4!} (-\sin t) \right| dt \leq \int_x^0 \frac{(x-t)^4}{4!} dt$$

(($x-t$)⁴ étant positif). Or

$$\int_x^0 \frac{(x-t)^4}{4!} dt = 0 - \frac{x^5}{5!} = \frac{(-x)^5}{5!} = \frac{|x|^5}{5!}$$

(x étant négatif). Ce qui montre l'inégalité pour tout x réel.

Déduisons de l'inégalité une valeur approchée de $\cos(1/2)$ à 10^{-3} près. Pour cela, il suffit d'écrire l'inégalité en prenant $x = \frac{1}{2}$. On obtient alors :

$$\left| \cos\left(\frac{1}{2}\right) - 1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{2^4 4!} \right| \leq \frac{1}{2^5 5!}.$$

En effet $\frac{1}{2^5 5!} < 10^{-3}$ et le calcul de $1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{2^4 4!}$ à 10^{-3} donne : $1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{2^4 4!} = 0,877$. On en déduit donc que $\cos(\frac{1}{2}) = 0,877$ à 10^{-3} près.

2. Démontrons que pour tout réel $x \geq 0$ on a

$$\left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{x^3}{3}.$$

Nous procédons de la même façon en considérant la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ définie pour tout x réel positif.

Nous avons déjà calculer la formule de Taylor de cette fonction à l'ordre 2 (f_2 de l'exercice précédent) :

$$\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \frac{2}{(1+t)^3} dt.$$

Ainsi

$$\left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq \left| \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \frac{2}{(1+t)^3} dt \right|.$$

La variable x étant positive nous appliquons l'inégalité triangulaire, ainsi :

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \frac{2}{(1+t)^3} dt \right| \leq \int_0^x \left| \frac{(x-t)^2}{2} \frac{2}{(1+t)^3} \right| dt.$$

Or pour tout $t \geq 0$ on a $1+t \geq 1$ et donc $\left| \frac{2}{(1+t)^3} \right| \leq 2$. De plus $(x-t)^2$ étant toujours positif, on obtient que :

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \frac{2}{(1+t)^3} dt \right| \leq \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} 2 dt.$$

Or une primitive de $(x-t)^2$ est $-\frac{(x-t)^3}{3}$ donc $\int_0^x (x-t)^2 dt = \frac{x^3}{3}$ et donc on obtient le résultat demandé, à savoir que :

$$\left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{x^3}{3}.$$

Nous pouvons en déduire une approximation de $\ln(1,1)$ à 10^{-3} près en posant $x = 0,1$. Ainsi $\frac{x^3}{3} = \frac{10^{-3}}{3} < 10^{-3}$ et il nous reste à calculer $x - \frac{x^2}{2}$ pour $x = 0,1$, ce qui donne $0,1 - \frac{10^{-2}}{2} = 0,095$ Donc $\ln(1,1) = 0,095$ à 10^{-3} près.

Exercice 3.— Corrigé.

On se propose de démontrer le théorème suivant. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $|f|$ et $|f''|$ soient bornées sur $\mathbb{R}$; on note M_0 et M_2 des réels tels que $|f(x)| \leq M_0$ et $|f''(x)| \leq M_2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors la dérivée f' est aussi bornée sur $\mathbb{R}$, et on a l'inégalité :

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

1. Nous pouvons appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 à la fonction f entre x et $x + h$, pour $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$ car f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. L'inégalité s'écrit :

$$\left| f(x+h) - f(x) - hf'(x) \right| \leq \frac{h^2}{2} M_2$$

ce qui se traduit par :

$$f(x+h) - f(x) - \frac{h^2}{2} M_2 \leq hf'(x) \leq f(x+h) - f(x) + \frac{h^2}{2} M_2.$$

Or comme $|f|$ est bornée sur $\mathbb{R}$ par M_0 on a l'inégalité : $-M_0 \leq f(x+h) \leq M_0$ et donc $-2M_0 \leq f(x+h) - f(x) \leq 2M_0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. On en déduit alors que

$$-2M_0 - \frac{h^2}{2} M_2 \leq hf'(x) \leq 2M_0 + \frac{h^2}{2} M_2$$

donc $\left| f'(x) \right| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{h}{2} M_2$ pour tout x réel et tout $h > 0$.

2. Etudions la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(h) = \frac{2M_0}{h} + \frac{h}{2} M_2.$$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée : $g'(h) = -\frac{2M_0}{h^2} + \frac{M_2}{2}$ et donc $g'(h_0) = 0$ si et seulement si $\frac{2M_0}{h_0^2} = \frac{M_2}{2}$ et $h_0 > 0$ soit $h_0 = \sqrt{\frac{4M_0}{M_2}}$. Le signe de g' sur $\mathbb{R}_+^*$ nous donne le sens de variation de g i.e. la fonction g est décroissante sur $]0, h_0]$ puis croissante de $[h_0, +\infty[$ tendant vers $+\infty$ aux bornes. Elle admet donc son minimum au point $h_0 = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$.

3. Or $g(h)$ est un majorant de $\left| f'(x) \right|$ pour tout x et tout $h > 0$, donc $g(h_0)$ majore $\left| f'(x) \right|$.

Or $g(h_0) = 2\sqrt{M_0 M_2}$ donc

$$\left| f'(x) \right| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

Exercice 4.— Corrigé.

Le but de cet exercice est de donner une autre expression du reste dans la formule de Taylor-Lagrange.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et ϕ une fonction continue sur le segment $[a, b]$. Notons $m = \inf_{x \in [a, b]} \phi(x)$ et $M = \sup_{x \in [a, b]} \phi(x)$: m et M existent car f étant continue sur le segment $[a, b]$ atteint ses bornes dans ce segment.

1. Démontrons que

$$m \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1} \leq \int_a^b (b-t)^n \phi(t) dt \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{n+1}.$$

Encadrons ϕ pour tout $t \in [a, b]$: $m \leq \phi(t) \leq M$. Or $(b - t)$ étant positif pour tout $t \in [a, b]$ en multipliant l'inégalité on trouve :

$$m(b - t)^n \leq (b - t)^n \phi(t) \leq M(b - t)^n.$$

Par positivité de l'intégrale on obtient alors :

$$\int_a^b m(b - t)^n dt \leq \int_a^b (b - t)^n \phi(t) dt \leq \int_a^b M(b - t)^n dt.$$

Or une primitive de la fonction $t \mapsto (b - t)^n$ est $t \mapsto -\frac{(b-t)^{n+1}}{n+1}$ donc l'inégalité devient :

$$m \frac{(b - a)^{n+1}}{n + 1} \leq \int_a^b (b - t)^n \phi(t) dt \leq M \frac{(b - a)^{n+1}}{n + 1}.$$

2. On peut encore écrire cette inégalité comme :

$$m \leq \frac{n + 1}{(b - a)^{n+1}} \int_a^b (b - t)^n \phi(t) dt \leq M$$

Or ϕ étant continue sur $[a, b]$ par le théorème des valeurs intermédiaires pour tout λ compris entre m et M il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $\phi(\alpha) = \lambda$. Ainsi il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\frac{n + 1}{(b - a)^{n+1}} \int_a^b (b - t)^n \phi(t) dt = \phi(c)$$

et donc

$$\int_a^b (b - t)^n \phi(t) dt = \frac{(b - a)^{n+1}}{n + 1} \phi(c).$$

3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Alors le théorème de Taylor Lagrange permet d'écrire :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k + \int_a^b \frac{(b - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Or d'après la question précédente il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b (b - t)^n f^{(n+1)}(t) dt = \frac{(b - a)^{n+1}}{n + 1} f^{(n+1)}(c)$$

car la fonction $f^{(n+1)}$ est continue sur $[a, b]$. Donc en remplaçant ce reste intégral par $\frac{(b-a)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(c)$ on a montré qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k + \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Exercice 5.— Corrigé.

Dans cet exercice on pose $f(x) = \ln(1+x)$ pour $x \in]-1, +\infty[$ et

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

1. Calculons les dérivées successives de f en tout nombre réel $x > -1$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, \quad f''(x) = -1(1+x)^{-2}, \quad f^{(3)}(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3},$$

$$f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4} = (-1)^3 3! (1+x)^{-4}.$$

Ce qui nous conduit à poser pour la démonstration par récurrence :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n}.$$

Si l'on suppose que cette formule est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ alors en la dérivant par rapport à x on obtient directement que

$$f^{(n+1)}(x) = ((-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n})' = (-1)^{n+1} (n-1)! n (1+x)^{-n-1} = (-1)^n (n!) (1+x)^{-(n+1)},$$

ce qui démontre la formule.

2. Appliquons maintenant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n entre 0 et x pour un réel $x > 0$:

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Or $\frac{f^{(k)}}{k!}(0) = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et donc la formule devient :

$$f(x) = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} (-1)^n (n!) (1+t)^{-(n+1)} dt$$

soit

$$f(x) = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \int_0^x (x-t)^n (-1)^n (1+t)^{-(n+1)} dt.$$

Ainsi, si l'on pose $x = 1$ la formule donne :

$$f(1) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right) = \int_0^1 (1-t)^n (-1)^n (1+t)^{-(n+1)} dt.$$

Or pour tout $t \geq 0$ on a $1 + t \geq 1$ donc

$$\left| \int_0^1 (1-t)^n (-1)^n (1+t)^{-(n+1)} dt \right| \leq \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1}$$

donc

$$\left| \ln(2) - u_n \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

car $f(1) = \ln(2)$. On en déduit donc que la suite (u_n) tend vers $\ln(2)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 6.— Corrigé.

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I . Appliquons le Théorème de Taylor Young à la fonction f entre x_0 et $x_0 + h$ à l'ordre 2 :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + o(h^2).$$

Faisons de même entre x_0 et $x_0 - h$, ainsi :

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + o(h^2).$$

Ainsi la somme des deux égalités donne :

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0) = 2\frac{h^2}{2}f''(x_0) + o(h^2)$$

donc

$$\frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0) + o(1)$$

ce qui signifie bien que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0).$$

Exercice 7.— Corrigé.

1. Lorsque $x \rightarrow 0$:

- a) $x^2 = o(x^3)$ est fausse car $\frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$ ne tend pas vers 0 quand $x \rightarrow 0$.
- b) $x^3 = o(x^2)$ est vraie car $\frac{x^3}{x^2} = x$ et $x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$.
- c) $x = o(1)$ est vraie car $\frac{x}{1} = x$ et $x \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$.
- d) $1 = o(x)$ est fausse car $\frac{1}{x}$ ne tend pas vers 0 quand $x \rightarrow 0$, la relation o n'est pas symétrique.
- e) $x^2 = o(x^2)$ est fausse car $\frac{x^2}{x^2} = 1$ ne tend pas vers 0 quand $x \rightarrow 0$, la relation o n'est pas réflexive.

- f) $x^2 = o(e^x)$ est vraie car $x^2 = x^2 \cdot e^{-x} \cdot e^x$ et $x^2 \cdot e^{-x}$ tend vers 0 quand $x \rightarrow 0$.
g) $e^x = o(x^2)$ est fausse car $\frac{e^x}{x^2} \rightarrow +\infty$ et donc ne tend pas vers 0 quand $x \rightarrow 0$.
h) $x^2 = o(\ln x)$ est vraie car $x^2 = \frac{x^2}{\ln x} \cdot \ln x$ et $\frac{x^2}{\ln x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$ en étant positif.
i) $\ln x = o(x^2)$ est fausse car $\frac{\ln x}{x^2} \rightarrow -\infty$ et non 0 quand $x \rightarrow 0$ en étant positif.

2. Reprenons les question précédentes quand $x \rightarrow +\infty$.

- a) $x^2 = o(x^3)$ est vraie car $x^2 = \frac{1}{x} x^3$ et $\frac{1}{x}$ tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$.
b) $x^3 = o(x^2)$ est fausse car $x^3 = x \cdot x^2$ et $x \rightarrow +\infty$.
c) $x = o(1)$ est fausse car $x = x \cdot 1$ et $x \rightarrow +\infty$.
d) $1 = o(x)$ est vraie car $1 = \frac{1}{x} x$ et $\frac{1}{x}$ tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$.
e) $x^2 = o(x^2)$ est fausse car $\frac{x^2}{x^2} = 1$ ne tend pas vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$.
f) $x^2 = o(e^x)$ est vraie car $x^2 = x^2 \cdot e^{-x} \cdot e^x$ et $x^2 \cdot e^{-x}$ tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$.
g) $e^x = o(x^2)$ est fausse car $\frac{e^x}{x^2} \rightarrow +\infty$ et donc ne tend pas vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$.
h) $x^2 = o(\ln x)$ est fausse car $\frac{x^2}{\ln x} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.
i) $\ln x = o(x^2)$ est vraie car $\ln x = \frac{\ln x}{x^2} x^2$ et $\frac{\ln x}{x^2} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 8.— Corrigé.

1. Déterminons un équivalent simple de chacune des fonctions suivantes quand $x \rightarrow 0$:

$$f(x) = x^2 - 3x + 1, \text{ or } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \text{ donc } f(x) \sim 1.$$

$$g(x) = \frac{2x^3 - 5x}{e^x} = -5x \frac{1 - \frac{2}{5}x^2}{e^x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{2}{5}x^2}{e^x} = 1$$

$$\text{donc le quotient } \frac{g(x)}{-5x} \text{ tend vers 1 quand } x \rightarrow 0 \text{ donc } g(x) \sim -5x$$

$$h(x) = \sqrt{2x^2 + 1 + \frac{1}{x}}. \text{ On remarque que } \sqrt{x} h(x) = \sqrt{2x^3 + x + 1} \text{ et } \sqrt{2x^3 + x + 1} \rightarrow 1$$

quand $x \rightarrow 0$. Donc $h(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$.

$$i(x) = \frac{x^2 + e^x}{x + 5}. \text{ Or } \lim_{x \rightarrow 0} i(x) = \frac{1}{5} \text{ donc } i(x) \sim \frac{1}{5}.$$

2. Reprenons la question précédente quand $x \rightarrow +\infty$.

$$f(x) = x^2 - 3x + 1 = x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right), \text{ or } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 1 \text{ donc } f(x) \sim x^2.$$

$$g(x) = \frac{2x^3 - 5x}{e^x} = \frac{2x^3}{e^x} \left(1 - \frac{5}{2x^2}\right) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{5}{2x^2}\right) = 1 \text{ donc } g(x) \sim \frac{2x^3}{e^x}$$

$$h(x) = \sqrt{2x^2 + 1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{2x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3}}.$$

Or $\sqrt{1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3}} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow +\infty$. Donc $h(x) \sim x\sqrt{2}$ en $+\infty$.

$$i(x) = \frac{x^2 + e^x}{x + 5} = \frac{e^x}{x} \frac{x^2 e^{-x} + 1}{1 + \frac{5}{x}}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{-x} + 1}{1 + \frac{5}{x}} = 1$ donc $i(x) \sim \frac{e^x}{x}$.

Exercice 9.— Corrigé.

Soit a un réel. En fonction de a , déterminons un équivalent simple quand $x \rightarrow +\infty$ de $\frac{\arctan(x)}{1 + x^a}$. Nous ferons de même avec $x^a \sin x$ quand $x \rightarrow 0$.

On remarque tout d'abord que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ donc $\arctan x \sim \frac{\pi}{2}$, ce qui donne le résultat demandé si $a = 0$.

Supposons $a < 0$ alors $\frac{1}{1+x^a} \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ donc la fonction

$$\frac{\arctan(x)}{1 + x^a} \sim \arctan x \sim \frac{\pi}{2}.$$

Supposons maintenant que $a > 0$ alors $\frac{1}{1+x^a} = \frac{1}{x^a} \frac{1}{x^{-a} + 1}$ et comme $\frac{1}{x^{-a} + 1} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow +\infty$ alors $\frac{1}{1+x^a} \sim \frac{1}{x^a}$. Ainsi

$$\frac{\arctan(x)}{1 + x^a} \sim \frac{\pi}{2x^a}$$

quand $x \rightarrow +\infty$.

On sait que $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$. Ecrivons que $x^a \sin x = x^{a+1} \frac{\sin x}{x}$ ainsi

$$x^a \sin x \sim x^{a+1}$$

quand $x \rightarrow 0$.