

Module MDD151 : Calcul intégral

Corrigé de la feuille d'exercices numéro 4

Développements limités

Calculs de développements limités en 0

Remarques : L'idée générale est la suivante. On connaît quelques développements limités (DL) de base grâce au cours. Puis on reconnaît dans la fonction à développer une somme, un produit, un quotient, une composée de fonctions dont on connaît déjà le développement limité.

Exercice 1.—[Sommes et produits] Indice : se servir des DL de $\exp$, $\sin$, $\cos$, $\frac{1}{1-x}$ et $(1+x)^\alpha$.

1. On soustrait les DL des deux fonctions $\frac{1}{1-x}$ et e^x à l'ordre 4 en 0 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} - e^x &= \left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)\right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{23}{24}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

2. On écrit le DL en 0 de $\cos$ à l'ordre 4 et de $\sin$ à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned}\cos x - 1 + \frac{x}{2} \sin x &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) - 1 + \frac{x}{2} \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^5)\right) \\ &= -\frac{1}{24}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

3. Ici on écrit le DL de $u \mapsto \sqrt{1+u}$ en 0 à l'ordre 2 avec $u(x) = x^2$ (qui tend bien vers 0 en 0) :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+u(x)} &= 1 + \frac{1}{2}u(x) + \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}{2!}u(x)^2 + o(u(x)^2) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Enfin

$$(x+1)\sqrt{1+u(x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

4. Le DL de $\sin x \cos x$ est fait dans le poly de cours. Mais voici le détail : on écrit les DL de $\sin$ et $\cos$ à l'ordre 4

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$

et

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3).$$

Et en faisant le produit

$$\begin{aligned} \cos x \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \\ &\quad - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3!} x^3 + o(x^4) \\ &= x - \frac{2}{3} x^3 + o(x^4). \end{aligned}$$

Remarque 1 On peut aussi remarquer que $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$ et écrire le développement de Taylor de $\sin(2x)$ en sachant que les dérivées d'ordre pair sont nulles.

5. On écrit le DL en 0 à l'ordre 4 des deux facteurs du produit :

$$\begin{aligned} e^x \sqrt{1+x} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + o(x^4)\right) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \\ &\quad + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}x^4 + o(x^4) \\ &\quad - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{8} \times \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \\ &\quad + \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{16}x^4 + o(x^4) \\ &\quad - \frac{5}{128}x^4 + o(x^4) + o(x^4) \end{aligned}$$

Donc

$$e^x \sqrt{1+x} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{17}{48}x^3 + \frac{11}{128}x^4 + o(x^4).$$

Exercice 2.—[Quotient et composition]

1. Indice : écrire $1/\cos$ comme le DL de $\frac{1}{1-u}$ en 0.

On écrit déjà le DL en 0 de $\sin$ et $\cos$ à l'ordre 4 (ε et ε tendent vers 0 en 0)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)}.$$

On remarque ensuite que $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1-u(x)}$ avec

$$u(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{24}x^4 - o(x^4).$$

En écrivant le DL en 0 à l'ordre 2 de $u \mapsto \frac{1}{1-u}$ on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} &= 1 + u(x) + u(x)^2 + o(u(x)^2) \\ &= 1 \\ &\quad + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} - o(x^4) \\ &\quad + \frac{x^4}{4} + o(x^4) + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4) \end{aligned}$$

Puis en faisant le produit et une troncature

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

On aurait aussi pu utiliser la formule de Taylor-Young.

2. En posant $u(x) = x - x^2$ on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x+x^2} &= \frac{1}{1-u(x)} \\ &= 1 + u(x) + u(x)^2 + u(x)^3 + u(x)^4 + o(u(x)^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x+x^2} &= 1 \\ &\quad + x - x^2 \\ &\quad + x^2 - 2x^3 + x^4 \\ &\quad + \frac{x^3 - 3x^4}{4} + o(x^4) \\ &\quad + \frac{x^4}{8} + o(x^4) + o(x^4) \\ &= 1 + x - x^3 - x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

3. On écrit le DL en 0 de $\sin$ à l'ordre 4, et on l'injecte dans celui de $\exp$:

$$\begin{aligned}\exp(\sin(x)) &= 1 + \sin x + \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{6} + \frac{(\sin x)^4}{24} + o((\sin x)^4) \\ &= 1 \\ &\quad + x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \\ &\quad + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4) \\ &\quad + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \\ &\quad + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) + o(x^4) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4).\end{aligned}$$

4. On écrit le DL de $\sin$ en 0 à l'ordre 5 d'où

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\sin x}{x}} &= \sqrt{\frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{x}} = \sqrt{1 + u(x)} \\ &= 1 + \frac{1}{2}u(x) - \frac{1}{8}u(x)^2 + o(u(x)^2)\end{aligned}$$

avec

$$u(x) = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4).$$

D'où, on tronquant

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\sin x}{x}} &= 1 \\ &\quad - \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{120}x^4 + o(x^4) \\ &\quad - \frac{1}{8} \times \frac{1}{6^2}x^4 + o(x^4) \\ &\quad + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{1440} + o(x^4).\end{aligned}$$

Exercice 3.—[Intégration] Le but de cette exercice est d'appliquer rigoureusement la Proposition du cours sur l'intégration des DL.

On commence par remarquer que les fonctions $x \mapsto \ln(x+1)$, $x \mapsto \arcsin(x)$, $x \mapsto \arctan(x)$ et $x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un petit intervalle I contenant 0 donc admettent par la formule de Taylor-Young un DL à tout ordre en 0, et donc a fortiori à l'ordre 4.

1. — On commence par remarquer que

$$\ln(1+x)' = \frac{1}{1+x},$$

donc pour avoir un DL à l'ordre 4 de $\ln(1+x)$ il suffit d'intégrer un DL à l'ordre 3 de $\frac{1}{1+x}$.

— Ensuite on remarque que le DL de $\frac{1}{1+x}$ peut être obtenu à partir du DL usuel de $\frac{1}{1-x}$, **qui est à connaître ou à savoir retrouver rapidement**, par un changement de variable $x \rightarrow -x$. On écrit

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3),$$

ce qui donne

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3).$$

— Donc par la Proposition du cours on obtient par intégration en 0

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \ln(1+0) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4). \end{aligned}$$

2. — On commence par remarquer que

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

donc pour avoir un DL à l'ordre 4 de $\arcsin(x)$ il suffit d'intégrer un DL à l'ordre 3 de $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

— Ensuite on remarque que le DL de $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ peut être obtenu du DL usuel de $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, **qui est à connaître ou à savoir retrouver rapidement**, par un changement de variable $x \rightarrow -x^2$. On écrit

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + o(x^3), \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3), \text{ pour } \alpha = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + o(x^6).$$

On ne cherche qu'un DL à l'ordre 3, donc on tronque et on trouve

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

Remarque 2 On aurait pu voir qu'on n'avait besoin que d'un DL à l'ordre 2 de $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ pour avoir un DL à 4 de $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ par la Théorème de composition des DL comme à l'exercice 2.

— Donc par la Proposition du cours on obtient par intégration en 0

$$\begin{aligned}\arcsin(x) &= \arcsin(0) + x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \\ &= x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4).\end{aligned}$$

Remarque 3 L'imparité de $\arcsin$ est bien vérifiée par notre DL car on a seulement des monômes d'ordre impair dans le DL.

3. — On commence par remarquer que

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

donc pour avoir un DL à l'ordre 4 de $\arctan(x)$ il suffit d'intégrer un DL à l'ordre 3 de $\frac{1}{1+x^2}$.

— Ensuite on remarque que le DL de $\frac{1}{1+x^2}$ peut être obtenu du DL obtenu en 1 de $\frac{1}{1+x}$ par un changement de variable $x \rightarrow x^2$. De plus par le théorème de composition des DL il suffit d'un DL à l'ordre 2 de $\frac{1}{1+x}$ pour obtenir un DL à l'ordre 3 de $\frac{1}{1+x^2}$.

On écrit

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$$

ce qui donne

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4).$$

— Donc par la Proposition du cours on obtient par intégration en 0

$$\begin{aligned}\arctan(x) &= \arctan(0) + x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4) \\ &= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4).\end{aligned}$$

Remarque 4 L'imparité de $\arctan$ est bien vérifiée par notre DL car on n'a que des monômes d'ordre impair dans le DL.

4. — Encore une fois on commence par

$$\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)' = e^{x^2},$$

donc pour avoir un DL à l'ordre 4 de $\int_0^x e^{t^2} dt$ il suffit d'intégrer un DL à l'ordre 3 de e^{x^2} .

- Ensuite on remarque que le DL de e^{x^2} peut être obtenu à partir du DL usuel de e^x , **qui est à connaître ou à savoir retrouver rapidement**, par un changement de variable $x \rightarrow -x^2$. De plus par le théorème de composition des DL il suffit d'un DL à l'ordre 2 de e^x pour obtenir un DL à l'ordre 3 de e^{x^2} .

On écrit

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

ce qui donne

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^3).$$

- Donc par la Proposition du cours on obtient par intégration en 0

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{t^2} dt &= \int_0^0 e^{t^2} dt + x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4) \\ &= x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4). \end{aligned}$$

Remarque 5 *L'imparité de $\int_0^x e^{t^2} dt$ est bien vérifiée par notre DL car on n'a que des monômes d'ordre impair dans le DL.*

Exercice 4.—

1. D'après l'exercice 3.1

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4),$$

de plus $\sin(x)$ est un DL usuel qui d'après le cours est

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Donc par le Théorème de produit de DL on obtient

$$\ln(1+x) \sin(x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{6} + o(x^5).$$

2. D'après le DL usuel,

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{24}x^4 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{120}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

On obtient

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 + o(x^5),$$

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \frac{7}{256}x^5 + o(x^5),$$

ce qui donne

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} = -x - \frac{1}{8}x^3 - \frac{7}{128}x^5 + o(x^5).$$

3. On remarque que

$$\sin x \cos x = \frac{\sin(2x)}{2},$$

et on écrit le DL usuel de $\sin$,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5),$$

ce qui donne

$$\sin x \cos x = \frac{\sin(2x)}{2} = x - \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

4. On commence par écrire

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6),$$

ce qui donne

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5),$$

donc

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)\right).$$

On pose

$$u = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + o(u^3).$$

Comme $u \sim -\frac{x^2}{6}$ on a $o(u^3) = o(x^6)$ donc

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^6).$$

5. On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

ce qui donne

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

On a également

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + o(x^5),$$

ce qui donne

$$\ln(1 - x)e^{x^2} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} - \frac{31x^5}{30} + o(x^5).$$

6. On écrit

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

et

$$\ln(1 - u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + o(u^3),$$

ce qui donne en posant $u = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5).$$

7. On a

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{1}{1-x}\right) &= \exp(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5)) \\ &= e \cdot e^{x+x^2+x^3+x^4+x^5+o(x^5)} \\ &= e + ex + \frac{3e}{2}x^2 + \frac{13e}{6}x^3 + \frac{73e}{24}x^4 + \frac{167e}{40}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

8. On a

$$\begin{aligned} \ln(1 + x^2) &= \ln(1 + u), \text{ avec } u = x^2, \\ &= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^5). \end{aligned}$$

9. On a

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5),$$

donc par intégration

$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt = x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} + o(x^5).$$

Application aux calculs de limites, de tangentes et positions relatives en 0

Exercice 5.—

1. On écrit le DL de la fonction $\sin$ à l'ordre 3 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x) - x}{x^3} &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{x^3} \\ &= \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} \\ &= -\frac{1}{6} + o(1),\end{aligned}$$

qui est bien un développement limité à l'ordre 0 en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)-x}{x^3}$.
On en déduit que la limite existe et est égale à

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

2. Calculons le DL du numérateur en 0 à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}1 + \ln(1+x) - e^x &= 1 + \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= -x^2(1 + o(1)).\end{aligned}$$

Par ailleurs, en écrivant également le DL de cos en 0 à l'ordre 2

$$\frac{1}{1 - \cos(x)} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} = \frac{2}{x^2} \frac{1}{1 + o(1)}.$$

Et finalement

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{-x^2(1 + o(1))}{x^2(1 + o(1))} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} = -2.$$

3. Le DL à l'ordre 1 du dénominateur s'obtient par soustraction des DL à l'ordre 1 des deux termes :

$$\begin{aligned}\ln(1+x) - \ln(1-x) &= (x + o(x)) - (-x + o(x)) \\ &= 2x + o(x).\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{2x}{\ln(1+x) - \ln(1-x)} = \frac{2x}{2x + o(x)} = \frac{1}{1 + o(1)}.$$

La fonction admet donc une limite quand x tend vers 0 et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\ln(1+x) - \ln(1-x)} = 1.$$

4. On a besoin du DL à l'ordre 2 de $\sin$ pour déterminer si la fonction admet une limite. Comme $\sin(x) = x + o(x^2)$ lorsque $x \rightarrow 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin(x)} &= \frac{1}{x + o(x^2)} \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + o(x)}.\end{aligned}$$

Le second facteur est l'inverse d'un DL à l'ordre 1. On utilise alors la propriété de composition des DL pour déterminer un DL de $\frac{1}{1+o(x)}$:

$$\frac{1}{1 + o(x)} = 1 + o(x)$$

Mais alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} &= \frac{1}{x} (1 + o(x)) - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} + o(1) - \frac{1}{x} \\ &= o(1),\end{aligned}$$

donc cette quantité tend vers 0 quand x tend vers 0. La fonction admet donc une limite quand x tend vers 0 et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right) = 0.$$

5. On utilise les DL à l'ordre 2 des différentes fonctions usuelles qui apparaissent pour écrire :

$$\frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2} + o(x)}$$

L'inverse d'un DL à l'ordre 1 apparaît au dénominateur du second facteur, donc par composition des DL :

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2} + o(x)\right)} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$$

On obtient alors

$$\frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x}{2} + o(x) \right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + o(1).$$

Pour le second terme on procède de même :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{e^x - 1} &= \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1} = \frac{1}{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \\
 &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + o(x)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{x}{2} + o(x))} \\
 &= \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x}{2} + o(x) \right) \\
 &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + o(1)
 \end{aligned}$$

Et finalement pour la différence, il vient :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{e^x - 1} &= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2} + o(1) \right) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} + o(1) \right) \\
 &= 1 + o(1).
 \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction admet une limite quand x tend vers 0 et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = 1.$$

Exercice 6.—

1. On utilise que $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et on cherche par composition le DL à l'ordre 2 de $x \mapsto \ln(1 - x^2)$. Comme $\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, et $(x^2)^2 = o(x^2)$, on a

$$\ln(1 - x^2) = -x^2 + o(x^2).$$

Alors

$$\frac{\sin(x) - x}{x \ln(1 - x^2)} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x \cdot (-x^2 + o(x^2))} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{-x^3 + o(x^3)} = \frac{-\frac{1}{6} + o(1)}{-1 + o(1)}.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x \ln(1 - x^2)} = \frac{1}{6}.$$

2. Les DL usuels à l'ordre 2 donnent

$$\frac{e^x - x - \cos(x)}{x^2} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)}{x^2} = \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2} = 1 + o(1)$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - \cos(x)}{x^2} = 1.$$

3. Les DL usuels à l'ordre 2 (avec composition de DL) donnent

$$\frac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{2\ln(1+x) - 2x - x^2} = \frac{2x + o(x^2) - 2(x + o(x^2))}{2\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 2x - x^2} = \frac{o(x^2)}{-2x^2 + o(x^2)} = \frac{o(1)}{-2 + o(1)}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - \sin(x)}{2\ln(1+x) - 2x - x^2} = 0.$$

4. La composition de DL à l'ordre 1 a permis d'obtenir à l'exercice précédent

$$\frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + o(1).$$

Donc

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = -\frac{1}{2} + o(1)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right) = -\frac{1}{2}.$$

5. On utilise le développement limité à l'ordre 4 de $\sin$ et le produit :

$$(\sin(x))^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)^2 = x^2 - 2\frac{x^4}{6} + o(x^4) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4).$$

Donc pour l'inverse

$$\frac{1}{(\sin(x))^2} = \frac{1}{x^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)} = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + o(1).$$

Ainsi

$$\frac{1}{(\sin(x))^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3} + o(1)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sin(x))^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}.$$

Exercice 7.—En effectuant un développement limité en 0, à un ordre à déterminer, calculer l'équation de la tangente en 0 du graphe de chacune des fonctions suivantes et indiquer la position relative du graphe et de sa tangente :

$$f_1(x) = \sqrt{1+2x} - \sqrt{1+x^2}.$$

Solution pour f_1 . On effectue un DL d'ordre 2 en 0 :

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + o(u^2).$$

Pour $\alpha = 1/2$ on a

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2).$$

Maintenant on remplace $u = 2x$ pour obtenir :

$$\sqrt{1+2x} = 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

On remplace $u = x^2$ pour obtenir :

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

On obtient ainsi le DL de f_1 en 0 :

$$f_1(x) = x - x^2 + o(x^2).$$

L'équation de la tangente en 0 de f_1 est : $y = x$. Pour déterminer la position relative du graphe de f_1 et de la droite $y = x$ on regarde la différence :

$$f_1(x) - x = -x^2 + o(x^2) = x^2(-1 + o(1)).$$

On déduit que pour x suffisamment petit, $o(1) < 1$, donc $f_1(x) \leq x$. On conclut que le graphe de f_1 est en-dessous de sa tangente en 0.

Solution pour f_2 . La fonction f_2 est définie par

$$f_2(x) = \arccos x + \cos x.$$

Il faut d'abord effectuer un DL de $\arccos x$ autour de 0. On dérive

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^\alpha$$

avec $\alpha = -1/2$. On rappelle le DL en 0 de $(1+u)^\alpha$:

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + o(u^2).$$

On remplace $u = -x^2$ et $\alpha = -1/2$ pour obtenir

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4).$$

Comme $\arccos 0 = \pi/2$ (on se rappelle ici la définition de la fonction $x \mapsto \arccos x$), on obtient le DL de $\arccos x$ en 0 :

$$\arccos x = \pi/2 - x - \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

On se rappelle du DL de $\cos$ en 0 :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$

donc

$$f_2(x) = 1 + \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

L'équation de la tangente en 0 est $y = 1 + \frac{\pi}{2} - x$. Elle est au-dessus du graphe de f_2 dans un voisinage de 0.

Solution pour f_3 . On effectue un DL de f_3 en 0 :

$$f_3(x) = e^{2x-x^2} = 1 + (2x - x^2) + \frac{(2x - x^2)^2}{2} + o(x^2) = 1 + 2x + x^2 + o(x^2).$$

L'équation de la tangente en 0 est : $y = 1 + 2x$. Elle est en-dessous du graphe de f_3 dans un voisinage de 0.

Solution pour f_4 . D'après l'exercice 3 le DL de f_4 en 0 est :

$$f_4(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

L'équation de sa tangente en 0 est : $y = x$. Ainsi, 0 est un point d'inflexion : pour $x \leq 0$ suffisamment petit, f_4 est en-dessous du graphe de sa tangente et pour $x \geq 0$ (suffisamment petit) elle est au-dessus.

Remarque 6 (Méthode générale détaillée) Pour avoir la position du graphe par rapport à la tangente au voisinage du point 0, la stratégie est d'écrire le DL de $f(x)$ en 0 au plus petit ordre n (supérieur ou égal à 2) pour lequel le coefficient a_n devant x^n est non nul :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_nx^n + o(x^n).$$

Notez que l'équation de la tangente en 0

$$y = a_0 + a_1x$$

est donnée par le polynôme tronqué de degré 1 de votre DL. (Pas besoin de tout recalculer!). Enfin, la courbe f est au-dessus (resp. en-dessous) de sa tangente en 0 si le signe de la fonction $f(x) - (a_0 + a_1x) = x^n(a_n + o(1))$ est positif (resp. négatif). Ensuite, le signe de x^n dépend de la parité de n . Si n est pair, $x^n \geq 0$. Si n est impair, x^n a le même signe que x .

Exercice 8.—

1. Dans l'exercice 1, nous avons obtenu le développement limité en 0 suivant :

$$\frac{1}{1-x} - e^x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{23}{24}x^4 + o(x^4) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

L'équation de la tangente en 0 à $x \mapsto \frac{1}{1-x} - e^x$ est donc :

$$y = 0.$$

La différence entre le graphe de la fonction et sa tangente en 0 est $\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, qui est positif lorsque x est suffisamment proche de 0. Autrement dit, le graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x} - e^x$ est au-dessus de sa tangente en 0, au voisinage de ce point.

2. Dans l'exercice 1, nous avons obtenu le développement limité en 0 suivant :

$$\cos x - 1 + \frac{x}{2} \sin x = -\frac{1}{24}x^4 + o(x^4).$$

L'équation de la tangente en 0 à $x \mapsto \cos x - 1 + \frac{x}{2} \sin x$ est donc :

$$y = 0.$$

La différence entre le graphe de la fonction et sa tangente en 0 est $-\frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$, qui est négatif lorsque x est suffisamment proche de 0. Autrement dit, le graphe de la fonction $x \mapsto \cos x - 1 + \frac{x}{2} \sin x$ est en-dessous de sa tangente en 0, au voisinage de ce point.

3. Dans l'exercice 1, nous avons obtenu le développement limité en 0 suivant :

$$(x+1)\sqrt{1+x^2} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

L'équation de la tangente en 0 à $x \mapsto (x+1)\sqrt{1+x^2}$ est donc :

$$y = 1 + x.$$

La différence entre le graphe de la fonction et sa tangente en 0 est $\frac{x^2}{2} + o(x^2)$, qui est positif lorsque x est suffisamment proche de 0. Autrement dit, le graphe de la fonction $x \mapsto (x+1)\sqrt{1+x^2}$ est au-dessus de sa tangente en 0, au voisinage de ce point.

4. Dans l'exercice 1, nous avons obtenu le développement limité en 0 suivant :

$$\cos x \sin x = x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^4).$$

L'équation de la tangente en 0 à $x \mapsto \cos x \sin x$ est donc :

$$y = x.$$

La différence entre le graphe de la fonction et sa tangente en 0 est $-\frac{2}{3}x^3 + o(x^4)$, qui est positif pour $x \leq 0$ suffisamment petit, et négatif pour $x \geq 0$ suffisamment petit. 0 est donc un point d'inflexion : pour $x \leq 0$ suffisamment petit, le graphe de la fonction $x \mapsto \cos x \sin x$

est au-dessus de sa tangente en 0, et pour $x \geq 0$ (suffisamment petit), il est en-dessous.

5. Dans l'exercice 1, nous avons obtenu le développement limité en 0 suivant :

$$e^x \sqrt{1+x} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{17}{48}x^3 + \frac{11}{128}x^4 + o(x^4) = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + o(x^2).$$

L'équation de la tangente en 0 à $x \mapsto e^x \sqrt{1+x}$ est donc :

$$y = 1 + \frac{3}{2}x.$$

La différence entre le graphe de la fonction et sa tangente en 0 est $\frac{7}{8}x^2 + o(x^2)$, qui est positif lorsque x est suffisamment proche de 0. Autrement dit, le graphe de la fonction $x \mapsto e^x \sqrt{1+x}$ est au-dessus de sa tangente en 0, au voisinage de ce point.

6. Dans l'exercice 2, nous avons obtenu le développement limité en 0 suivant :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

L'équation de la tangente en 0 à $x \mapsto \tan(x)$ est donc :

$$y = x.$$

La différence entre le graphe de la fonction et sa tangente en 0 est $\frac{x^3}{3} + o(x^4)$, qui est négatif pour $x \leq 0$ suffisamment petit, et positif pour $x \geq 0$ suffisamment petit. 0 est donc un point d'inflexion : pour $x \leq 0$ suffisamment petit, le graphe de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ est en-dessous de sa tangente en 0, et pour $x \geq 0$ (suffisamment petit), il est au-dessus.

7. Dans l'exercice 2, nous avons obtenu le développement limité en 0 suivant :

$$\frac{1}{1-x+x^2} = 1 + x - x^3 - x^4 + o(x^4) = 1 + x - x^3 + o(x^3).$$

L'équation de la tangente en 0 à $x \mapsto \frac{1}{1-x+x^2}$ est donc :

$$y = 1 + x.$$

La différence entre le graphe de la fonction et sa tangente en 0 est $-x^3 + o(x^3)$, qui est positif pour $x \leq 0$ suffisamment petit, et négatif pour $x \geq 0$ suffisamment petit. 0 est donc un point d'inflexion : pour $x \leq 0$ suffisamment petit, le graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x+x^2}$ est au-dessus de sa tangente en 0, et pour $x \geq 0$ (suffisamment petit), il est en-dessous.

8. Dans l'exercice 2, nous avons obtenu le développement limité en 0 suivant :

$$\exp(\sin(x)) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

L'équation de la tangente en 0 à $x \mapsto \exp(\sin(x))$ est donc :

$$y = 1 + x.$$

La différence entre le graphe de la fonction et sa tangente en 0 est $\frac{x^2}{2} + o(x^2)$, qui est positif lorsque x est suffisamment proche de 0. Autrement dit, le graphe de la fonction $x \mapsto \exp(\sin(x))$ est au-dessus de sa tangente en 0, au voisinage de ce point.

9. Dans l'exercice 2, nous avons obtenu le développement limité en 0 suivant :

$$\sqrt{\frac{\sin x}{x}} = 1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{1440} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{12} + o(x^2).$$

L'équation de la tangente en 0 à $x \mapsto \sqrt{\frac{\sin x}{x}}$ est donc :

$$y = 1.$$

La différence entre le graphe de la fonction et sa tangente en 0 est $-\frac{x^2}{12} + o(x^2)$, qui est négatif lorsque x est suffisamment proche de 0. Autrement dit, le graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{\sin x}{x}}$ est en-dessous de sa tangente en 0, au voisinage de ce point.

10. Dans l'exercice 3, nous avons obtenu le développement limité en 0 suivant :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

L'équation de la tangente en 0 à $x \mapsto \ln(1+x)$ est donc :

$$y = x.$$

La différence entre le graphe de la fonction et sa tangente en 0 est $-\frac{x^2}{2} + o(x^2)$, qui est négatif lorsque x est suffisamment proche de 0. Autrement dit, le graphe de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est en-dessous de sa tangente en 0, au voisinage de ce point.

11. Dans l'exercice 3, nous avons obtenu le développement limité en 0 suivant :

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4).$$

L'équation de la tangente en 0 à $x \mapsto \arcsin(x)$ est donc :

$$y = x.$$

La différence entre le graphe de la fonction et sa tangente en 0 est $\frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$, qui est négatif pour $x \leq 0$ suffisamment petit, et positif pour $x \geq 0$ suffisamment petit. 0 est donc

un point d'inflexion : pour $x \leq 0$ suffisamment petit, le graphe de la fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ est en-dessous de sa tangente en 0, et pour $x \geq 0$ (suffisamment petit), il est au-dessus.

12. Dans l'exercice 3, nous avons obtenu le développement limité en 0 suivant :

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4).$$

L'équation de la tangente en 0 à $x \mapsto \arctan(x)$ est donc :

$$y = x.$$

La différence entre le graphe de la fonction et sa tangente en 0 est $-\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$, qui est positif pour $x \leq 0$ suffisamment petit, et négatif pour $x \geq 0$ suffisamment petit. 0 est donc un point d'inflexion : pour $x \leq 0$ suffisamment petit, le graphe de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$ est au-dessus de sa tangente en 0, et pour $x \geq 0$ (suffisamment petit), il est en-dessous.

13. Dans l'exercice 3, nous avons obtenu le développement limité en 0 suivant :

$$\int_0^x e^{t^2} dt = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4).$$

L'équation de la tangente en 0 à $x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$ est donc :

$$y = x.$$

La différence entre le graphe de la fonction et sa tangente en 0 est $\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$, qui est négatif pour $x \leq 0$ suffisamment petit, et positif pour $x \geq 0$ suffisamment petit. 0 est donc un point d'inflexion : pour $x \leq 0$ suffisamment petit, le graphe de la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$ est en-dessous de sa tangente en 0, et pour $x \geq 0$ (suffisamment petit), il est au-dessus.

14. Dans l'exercice 4, nous avons obtenu le développement limité en 0 suivant :

$$\ln(1+x) \sin(x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{6} + o(x^5) = x^2 + o(x^2).$$

L'équation de la tangente en 0 à $x \mapsto \ln(1+x) \sin(x)$ est donc :

$$y = 0.$$

La différence entre le graphe de la fonction et sa tangente en 0 est $x^2 + o(x^2)$, qui est positif lorsque x est suffisamment proche de 0. Autrement dit, le graphe de la fonction $x \mapsto \ln(1+x) \sin(x)$ est au-dessus de sa tangente en 0, au voisinage de ce point.

15. Dans l'exercice 4, nous avons obtenu le développement limité en 0 suivant :

$$\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x} = -x - \frac{1}{8}x^3 - \frac{7}{128}x^5 + o(x^5) = -x - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3).$$

L'équation de la tangente en 0 à $x \mapsto \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}$ est donc :

$$y = -x.$$

La différence entre le graphe de la fonction et sa tangente en 0 est $-\frac{1}{8}x^3 + o(x^3)$, qui est positif pour $x \leq 0$ suffisamment petit, et négatif pour $x \geq 0$ suffisamment petit. 0 est donc un point d'inflexion : pour $x \leq 0$ suffisamment petit, le graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}$ est au-dessus de sa tangente en 0, et pour $x \geq 0$ (suffisamment petit), il est en-dessous.

16. Dans l'exercice 4, nous avons obtenu le développement limité en 0 suivant :

$$\sin x \cos x = x - \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) = x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3).$$

L'équation de la tangente en 0 à $x \mapsto \sin x \cos x$ est donc :

$$y = x.$$

La différence entre le graphe de la fonction et sa tangente en 0 est $-\frac{2x^3}{3} + o(x^3)$, qui est positif pour $x \leq 0$ suffisamment petit, et négatif pour $x \geq 0$ suffisamment petit. 0 est donc un point d'inflexion : pour $x \leq 0$ suffisamment petit, le graphe de la fonction $x \mapsto \sin x \cos x$ est au-dessus de sa tangente en 0, et pour $x \geq 0$ (suffisamment petit), il est en-dessous.

17. Dans l'exercice 4, nous avons obtenu le développement limité en 0 suivant :

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^6) = -\frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

L'équation de la tangente en 0 à $x \mapsto \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ est donc :

$$y = 0.$$

La différence entre le graphe de la fonction et sa tangente en 0 est $-\frac{x^2}{6} + o(x^2)$, qui est négatif lorsque x est suffisamment proche de 0. Autrement dit, le graphe de la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ est en-dessous de sa tangente en 0, au voisinage de ce point.

18. Dans l'exercice 4, nous avons obtenu le développement limité en 0 suivant :

$$\ln(1-x)e^{x^2} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} - \frac{31x^5}{30} + o(x^5) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

L'équation de la tangente en 0 à $x \mapsto \ln(1-x)e^{x^2}$ est donc :

$$y = -x.$$

La différence entre le graphe de la fonction et sa tangente en 0 est $-\frac{x^2}{2} + o(x^2)$, qui est négatif lorsque x est suffisamment proche de 0. Autrement dit, le graphe de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)e^{x^2}$ est en-dessous de sa tangente en 0, au voisinage de ce point.

19. Dans l'exercice 4, nous avons obtenu le développement limité en 0 suivant :

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

L'équation de la tangente en 0 à $x \mapsto \ln(\cos x)$ est donc :

$$y = 0.$$

La différence entre le graphe de la fonction et sa tangente en 0 est $-\frac{x^2}{2} + o(x^2)$, qui est négatif lorsque x est suffisamment proche de 0. Autrement dit, le graphe de la fonction $x \mapsto \ln(\cos x)$ est en-dessous de sa tangente en 0, au voisinage de ce point.

20. Dans l'exercice 4, nous avons obtenu le développement limité en 0 suivant :

$$\exp\left(\frac{1}{1-x}\right) = e + ex + \frac{3e}{2}x^2 + \frac{13e}{6}x^3 + \frac{73e}{24}x^4 + \frac{167e}{40}x^5 + o(x^5) = e + ex + \frac{3e}{2}x^2 + o(x^2).$$

L'équation de la tangente en 0 à $x \mapsto \exp(\frac{1}{1-x})$ est donc :

$$y = e + ex.$$

La différence entre le graphe de la fonction et sa tangente en 0 est $\frac{3e}{2}x^2 + o(x^2)$, qui est positif lorsque x est suffisamment proche de 0. Autrement dit, le graphe de la fonction $x \mapsto \exp(\frac{1}{1-x})$ est au-dessus de sa tangente en 0, au voisinage de ce point.

21. Dans l'exercice 4, nous avons obtenu le développement limité en 0 suivant :

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^5) = x^2 + o(x^2).$$

L'équation de la tangente en 0 à $x \mapsto \ln(1+x^2)$ est donc :

$$y = 0.$$

La différence entre le graphe de la fonction et sa tangente en 0 est $x^2 + o(x^2)$, qui est positif lorsque x est suffisamment proche de 0. Autrement dit, le graphe de la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$ est au-dessus de sa tangente en 0, au voisinage de ce point.

22. Dans l'exercice 4, nous avons obtenu le développement limité en 0 suivant :

$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt = x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} + o(x^5) = x - \frac{x^3}{18} + o(x^3).$$

L'équation de la tangente en 0 à $x \mapsto \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ est donc :

$$y = x.$$

La différence entre le graphe de la fonction et sa tangente en 0 est $-\frac{x^3}{18} + o(x^3)$, qui est positif pour $x \leq 0$ suffisamment petit, et négatif pour $x \geq 0$ suffisamment petit. 0 est donc un point d'inflexion : pour $x \leq 0$ suffisamment petit, le graphe de la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ est au-dessus de sa tangente en 0, et pour $x \geq 0$ (suffisamment petit), il est en-dessous.

Développements limités en un point autre que 0

Exercice 9.—Indication : On pourra poser $x = 1 + h$, et remarquer que x tend vers 1 si, et seulement si, h tend vers 0.

1. Effectuons tout d'abord un DL de $\sqrt{3+x}$ pour x au voisinage de 1. On pose alors $x = 1 + h$ avec $h \rightarrow 0$ (lorsque $x \rightarrow 1$). On a donc,

$$\sqrt{3+x} = \sqrt{4+h} = \sqrt{4(1+\frac{h}{4})} = \sqrt{4}\sqrt{1+\frac{h}{4}}.$$

Évidemment $\frac{h}{4} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, donc

$$\sqrt{3+x} = 2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{h}{4} + o(h) \right).$$

On en déduit alors un DL de f , au voisinage de 1 (à l'ordre 1),

$$f(x) = f(1+h) = \frac{2 - 2 - \frac{h}{4} + o(h)}{h} = \frac{-\frac{h}{4} + o(h)}{h} = -\frac{1}{4} + o(1).$$

Donc lorsque $x \rightarrow 1$, i.e. $h \rightarrow 0$,

$$f(x) = f(1+h) = -\frac{1}{4} + o(1) \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\frac{1}{4}.$$

Autrement dit f est prolongeable par continuité en 1, en posant la valeur $f(1) = -\frac{1}{4}$.

2. Dans la question précédente on a utilisé un DL à l'ordre 1 de racine, ici on donne un DL jusqu'à l'ordre 3, $\frac{h}{4} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, donc

$$\sqrt{3+x} = 2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{h}{4} - \frac{1}{8} \frac{h^2}{16} + \frac{1}{16} \frac{h^3}{64} + o(h^3) \right).$$

On en déduit alors un DL de f , au voisinage de 1,

$$\begin{aligned} f(x) = f(1+h) &= \frac{2 - 2 - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{64} - \frac{1}{16} \frac{h^3}{64} + o(h^3)}{h} = \frac{-\frac{h}{4} + \frac{h^2}{64} - \frac{h^3}{512} + o(h^3)}{h} \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{h}{64} - \frac{h^2}{512} + o(h^2) \end{aligned}$$

On peut alors effectuer le taux d'accroissement de f en 1 :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{f(1 + h) + \frac{1}{4}}{h} = \frac{1}{64} - \frac{h}{512} + o(h^2) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{64}.$$

En particulier le taux d'accroissement converge quand $h \rightarrow 0$, donc f est dérivable en 1, et de dérivée $\frac{1}{64}$. La tangente est alors donnée par l'équation

$$y = -\frac{1}{4} + \frac{1}{64}(x - 1).$$

Remarquez que pour ça, on aurait pu se contenter d'un DL à l'ordre 2. Le terme (supplémentaire) à l'ordre 3 nous permet donc de comparer la position de la courbe de f par rapport à sa tangente (en $x = 1$).

3. Au voisinage de $x = 1$ (i.e. $h = 0$) la différence entre f et sa tangente est alors donnée par

$$-\frac{h^2}{512} + o(h^2),$$

qui est négatif (puisque $h^2 > 0$ et domine $o(h^2)$ au voisinage de 0). Autrement dit, la courbe de f est sous sa tangente, localement au voisinage de 1.

Exercice 10.—Indication : Cherchez des DL à l'ordre 1 (pour l'équation de la tangente) et 2 (pour la position relative). Posez $x = 1 + h$, avec $h \rightarrow 0$.

1. On effectue directement un DL à l'ordre 2 de f , en utilisant celui de $\sqrt{x} = \sqrt{1 + h}$ et $\sqrt{3 + x} = \sqrt{4 + h} = 2\sqrt{1 + \frac{h}{4}}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + h + 2 \left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2) \right) - 2 \left(1 + \frac{h}{8} - \frac{h^2}{128} + o(h^2) \right) \\ &= 1 + \frac{7}{4}h - \frac{15}{64}h^2 + o(h^2). \end{aligned}$$

La tangente de f au voisinage de 1 est donnée par la droite d'équation

$$y = 1 + \frac{7}{4}(x - 1).$$

La différence entre f et sa tangente au voisinage de 1 est donnée par

$$-\frac{15}{64}h^2 + o(h^2),$$

qui est négatif pour h au voisinage de 0, autrement dit, le graphe de f est sous sa tangente au voisinage de 1.

2. On utilise $\sqrt{3x} = \sqrt{3}\sqrt{1+h}$ et $\sqrt{2+x} = \sqrt{3+h} = \sqrt{3}\sqrt{1+\frac{h}{3}}$. On en déduit que

$$g(1+h) = \sqrt{3} \left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2) - \left(1 + \frac{h}{6} - \frac{h^2}{72} + o(h^2) \right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{3}h - \frac{\sqrt{3}}{9}h^2 + o(h^2).$$

On en déduit que la tangente en 1 de g est donnée par la droite d'équation

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-1).$$

Et la différence entre g et sa tangente est donnée par

$$-\frac{\sqrt{3}}{9}h^2 + o(h^2),$$

qui est négatif au voisinage de $h = 0$, on en déduit que le graphe de g est sous sa tangente en $x = 1$.

Exercice 11.—1. On remarque que :

$$f_1(x) = \frac{2+x}{3+x} = \frac{2+x}{2+(x+1)} = \frac{1}{2} \times \frac{2+x}{1+u(x)},$$

en posant $u(x) = \frac{x+1}{2}$. Quand $x \rightarrow -1$, on a $u(x) \rightarrow 0$. En utilisant le DL à l'ordre 2 de $u \mapsto \frac{1}{1+u}$, on obtient pour $x \rightarrow -1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+u(x)} &= 1 - u(x) + u^2(x) + o(u(x)^2) \\ &= 1 - \frac{(x+1)}{2} + \frac{(x+1)^2}{4} + o((x+1)^2). \end{aligned}$$

Comme $2+x = 1 + o(1)$ lorsque $x \rightarrow -1$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2} \times (1 + o(1)) \times \left(1 - \frac{(x+1)}{2} + \frac{(x+1)^2}{4} + o((x+1)^2) \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{(x+1)}{4} + \frac{(x+1)^2}{8} + o((x+1)^2). \end{aligned}$$

La tangente à f_1 en $x_0 = -1$ est donc la droite d'équation :

$$y = \frac{1}{2} - \frac{(x+1)}{4} = \frac{1-x}{4}.$$

La différence entre f_1 et sa tangente au voisinage de -1 est $\frac{(x+1)^2}{8} + o((x+1)^2)$, qui est positif lorsque x est suffisamment proche de -1 . Autrement dit, le graphe de f_1 est au-dessus de sa tangente au voisinage de -1 .

2. Comme $\sin(x)$ est strictement positif au voisinage de $\frac{\pi}{4}$, la fonction f_2 est $\mathcal{C}^\infty$ en ce point. Calculons $f_2'(\frac{\pi}{4})$ et $f_2''(\frac{\pi}{4})$. Pour x dans un voisinage de $\frac{\pi}{4}$, on a :

$$f_2'(x) = \frac{\sin'(x)}{\sin(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \tan(x)$$

et

$$f_2''(x) = \tan'(x) = 1 + \tan^2(x).$$

Ainsi, on en déduit que $f_2'(\frac{\pi}{4}) = 1$ et $f_2''(\frac{\pi}{4}) = 2$. En appliquant à f_2 la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{4}$, on obtient :

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f_2\left(\frac{\pi}{4}\right) + f_2'\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + f_2''\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2} + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right) \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right) \\ &= -\frac{1}{2}\ln(2) + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right). \end{aligned}$$

La tangente à f_2 en $x_0 = \frac{\pi}{4}$ est donc la droite d'équation :

$$y = -\frac{1}{2}\ln(2) + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{4} + x.$$

La différence entre f_2 et sa tangente au voisinage de $\frac{\pi}{4}$ est $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)$, qui est positif lorsque x est suffisamment proche de $\frac{\pi}{4}$. Autrement dit, le graphe de f_2 est au-dessus de sa tangente au voisinage de $\frac{\pi}{4}$.

3. La fonction f_3 est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 1. Calculons $f_3'(1)$ et $f_3''(1)$. Pour x dans un voisinage de 1, on a :

$$f_3'(x) = \left(\frac{-2}{x^3}\right) \times e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \times \left(\frac{-1}{x^2} \times e^{\frac{1}{x}}\right) = -\left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) \times e^{\frac{1}{x}}$$

et

$$f_3''(x) = \left(\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^5}\right) \times e^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{2}{x^5} + \frac{1}{x^6}\right) \times e^{\frac{1}{x}}.$$

Ainsi, on en déduit que $f_3'(1) = -3e^1$ et $f_3''(1) = 13e^1$. En appliquant à f_3 la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en 1, on obtient :

$$\begin{aligned} f_3(x) &= f_3(1) + f_3'(1) \times (x - 1) + f_3''(1) \times \frac{(x - 1)^2}{2} + o((x - 1)^2) \\ &= e^1 - 3e^1(x - 1) + 13e^1 \frac{(x - 1)^2}{2} + o((x - 1)^2). \end{aligned}$$

La tangente à f_3 en $x_0 = 1$ est donc la droite d'équation :

$$y = e^1 - 3e^1(x - 1) = 4e^1 - 3e^1x.$$

La différence entre f_3 et sa tangente au voisinage de 1 est $13e^1 \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)$, qui est positif lorsque x est suffisamment proche de 1. Autrement dit, le graphe de f_3 est au-dessus de sa tangente au voisinage de 1.

Recherche d'asymptotes et positions relatives

Exercice 12.—1) Étudions la fonction $f_1(x) = x\sqrt{\frac{x+2}{x}}$ en $+\infty$. On écrit que :

$$x\sqrt{\frac{x+2}{x}} = x\sqrt{\frac{x(1+\frac{2}{x})}{x}} = x\sqrt{1+\frac{2}{x}}$$

En posant $u = \frac{1}{x}$ et remarquant que lorsque $x \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow 0$ nous déduisons que

$$\sqrt{1+\frac{2}{x}} = (1+2u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(2u) - \frac{1}{8}(2u)^2 + o(u^2)$$

Donc

$$x\sqrt{\frac{x+2}{x}} = x \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(1/x^2) \right)$$

Ainsi pour x au voisinage de $+\infty$ on obtient :

$$f_1(x) = x + 1 - \frac{1}{2x} + o(1/x).$$

Donc le graphe de f_1 possède une asymptote d'équation $y = x+1$ et le graphe est au-dessous de l'asymptote car $-\frac{1}{2} < 0$.

Étudions la fonction $f_1(x) = x\sqrt{\frac{x+2}{x}}$ en $-\infty$. Les étapes sont identiques au cas $+\infty$ et nous obtenons ainsi la même expression pour x au voisinage de $-\infty$:

$$f_1(x) = x + 1 - \frac{1}{2x} + o(1/x)$$

Donc le graphe de f_1 possède aussi une asymptote d'équation $y = x+1$ en $-\infty$ mais cette fois-ci le graphe est au-dessus de l'asymptote car $-\frac{1}{2x}$ est maintenant positif.

2) Étudions la fonction $f_2(x) = \sqrt{x(1+2x)}e^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$. On écrit que :

$$\sqrt{x(1+2x)} = x\sqrt{2+\frac{1}{x}} = (\sqrt{2x})\sqrt{1+\frac{1}{2x}}$$

En posant $u = \frac{1}{x}$ et remarquant que lorsque $x \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow 0$ nous déduisons que

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2x}} = \left(1 + \frac{u}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{2}\right) - \frac{1}{8} \left(\frac{u}{2}\right)^2 + o(u^2)$$

et

$$e^{1/x} = e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

Donc

$$\begin{aligned} \sqrt{x(1+2x)}e^{\frac{1}{x}} &= (\sqrt{2x}) \left(1 + \frac{1}{4x} - \frac{1}{32x^2} + o(1/x^2)\right) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o(1/x^2)\right) \\ &= (\sqrt{2x}) \left(1 + \frac{5}{4x} + \frac{23}{32x^2} + o(1/x^2)\right) \end{aligned}$$

Ainsi pour x au voisinage de $+\infty$ on obtient :

$$f_2(x) = (\sqrt{2x}) \left(1 + \frac{5}{4x} + \frac{23}{32x^2} + o(1/x^2)\right)$$

Donc le graphe de f_2 possède une asymptote d'équation $y = \sqrt{2x} + \frac{5}{2\sqrt{2}}$ en $+\infty$ et le graphe est au-dessus de l'asymptote car $\frac{23}{16\sqrt{2}} > 0$.

Étudions maintenant $f_2(x) = \sqrt{x(1+2x)}e^{\frac{1}{x}}$ en $-\infty$. Cette fois nous avons :

$$\sqrt{x(1+2x)} = -x\sqrt{2 + \frac{1}{x}} = -(\sqrt{2x})\sqrt{1 + \frac{1}{2x}}$$

Ainsi au voisinage de $-\infty$ on obtient :

$$f_2(x) = -(\sqrt{2x}) \left(1 + \frac{5}{4x} + \frac{23}{32x^2} + o(1/x^2)\right)$$

Le graphe possède aussi l'asymptote $y = -\sqrt{2x} - \frac{5}{2\sqrt{2}}$ en $-\infty$ et le graphe est au-dessus de l'asymptote car $-\frac{23}{16\sqrt{2}}x > 0$ pour $x < 0$.

3) La fonction $f_3(x) = \ln \left(\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x} \right)$ est définie sur $]0, +\infty[$.

Étudions la fonction $f_3(x) = \ln \left(\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x} \right)$ en $+\infty$. On écrit que :

$$\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x} = 1 + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1 + \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

En posant $u = \frac{1}{x}$ et remarquant que lorsque $x \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow 0$ nous déduisons que

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{1 + u^2} &= 1 + 1 + \frac{1}{2}(u^2) + o(u^2) \\ &= 2 + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2) \end{aligned}$$

D'un autre côté, nous avons aussi

$$\ln(2 + v) = \ln(2 + 0) + \frac{1}{(2 + 0)}v + o(v)$$

Nous cherchons le développement limité d'une composition de fonctions donc il faut remplacer dans l'équation du dessus v par $\frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$.

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{x}\right) &= \ln(2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u^2 + o(u^2)\right) + o(u^2) \\ &= \ln(2) + \frac{1}{4x^2} + o(1/x^2) \end{aligned}$$

Nous avons donc une asymptote horizontale $y = \ln(2)$ car $\lim_{+\infty} f_3 = \ln(2)$. Le graphe se situe au-dessus de l'asymptote car $\frac{1}{4x^2} > 0$.

Etudions maintenant la fonction en 0^+ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln(x) = +\infty$$

Nous avons donc une asymptote verticale en 0.

Exercice 13.—

1) La fonction f_1 est définie sur $] -\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. On a

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 + 1}e^{\frac{2}{x}} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}e^{\frac{2}{x}} = |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}e^{\frac{2}{x}}.$$

Avec $u = \frac{1}{x}$,

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}e^{\frac{2}{x}} &= \sqrt{1 + u^2}e^{2u} = (1 + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2))(1 + 2u + 2u^2 + o(u^2)) \\ &= 1 + 2u + \frac{5}{2}u^2 + o(u^2). \end{aligned}$$

D'où

$$f_1(x) = |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}e^{\frac{2}{x}} = |x|\left(1 + 2u + \frac{5}{2}u^2 + o(u^2)\right) = |x|\left(1 + 2\frac{1}{x} + \frac{5}{2}\frac{1}{x^2} + o(1/x^2)\right).$$

Pour $x > 0$, on a

$$f_1(x) = x + 2 + \frac{5}{2x} + o(1/x).$$

Comme $f_1(x) - (x + 2) = \frac{5}{2x} + o(1/x)$ tend vers 0 par valeurs positives quand x tend vers $+\infty$, la courbe $y = f_1(x)$ a pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = x + 2$, la courbe étant au-dessus de son asymptote.

Pour $x < 0$, on a

$$f_1(x) = -x - 2 - \frac{5}{2x} + o(1/x).$$

Comme $f_1(x) - (-x - 2) = -\frac{5}{2x} + o(1/x)$ tend vers 0 par valeurs positives quand x tend vers $-\infty$, la courbe $y = f_1(x)$ a pour asymptote en $-\infty$ la droite d'équation $y = -x - 2$, la courbe étant au-dessus de son asymptote.

Si x tend vers 0^+ , $f_1(x)$ tend vers $+\infty$: on a une asymptote verticale.

Si x tend vers 0^- , $f_1(x)$ tend vers 0. Notez que $\frac{f_1(x)-0}{x-0}$ tend vers 0 par valeurs positives quand x tend vers 0^- donc la courbe est au-dessus de sa (demi-)tangente horizontale $y = 0$ en 0^+ .

2) La fonction f_2 est définie sur $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. On a

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{4x^2 \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)} - \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} \\ &= 2|x| \sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}} - |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = |x| \left(2\sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) \end{aligned}$$

Avec $u = \frac{1}{x}$,

$$\begin{aligned} 2\sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} &= 2\sqrt{1 + \frac{1}{4}u^2} - \sqrt{1 - u^2} \\ &= 2 \left(1 + \frac{1}{8}u^2 + o(u^2) \right) - \left(1 - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2) \right) \\ &= 1 + \frac{3}{4}u^2 + o(u^2) \end{aligned}$$

On a donc

$$f_2(x) = |x| \left(1 + \frac{3}{4}u^2 + o(u^2) \right) = |x| \left(1 + \frac{3}{4x^2} + o(1/x^2) \right)$$

Pour $x > 1$, on a

$$f_2(x) = x + \frac{3}{4x} + o(1/x)$$

La courbe $y = f_2(x)$ a pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = x$, la courbe étant au-dessus de son asymptote.

Pour $x < -1$, on a

$$f_2(x) = -x - \frac{3}{4x} + o(1/x)$$

La courbe $y = f_2(x)$ a pour asymptote en $-\infty$ la droite d'équation $y = -x$, la courbe étant au-dessus de son asymptote.

3) La fonction f_3 est définie sur $]0, +\infty[$. On a

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \ln \left(\sqrt{e^x - e^{-x}} \right) = \frac{1}{2} \ln (e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2} \ln (e^x (1 - e^{-2x})) \\ &= \frac{1}{2} (\ln (e^x) + \ln (1 - e^{-2x})) = \frac{1}{2} (x + \ln (1 - e^{-2x})) \end{aligned}$$

Avec $u = e^{-2x}$, $\ln (1 - e^{-2x}) = \ln (1 - u) = u + o(u) = e^{-2x} + o(e^{-2x})$ et

$$f_3(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}e^{-2x} + o(e^{-2x})$$

La courbe $y = f_3(x)$ a pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$, la courbe étant au-dessus de son asymptote.

En 0^+ , la courbe a une asymptote verticale.

Pour aller plus loin : ces exercices sont facultatifs et ne sont à faire que si les précédents sont bien compris

Exercice 14.—*Indication : développer la fonction en 0 de deux manières, une des manières utilisant la formule de Taylor-Young.*

On rappelle que $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \dots + u^n + o(u^n) = \sum_{k=0}^n u^k + o(u^n)$. On obtient donc (en faisant $u = -x^4$) le développement limité en 0 de f à l'ordre $4n + 2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \left(\sum_{k=0}^n (-x^4)^k + o(x^{4n}) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{4k+2} + o(x^{4n+2}) \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme la fonction f est de classe C^∞ , on peut utiliser la formule de Taylor-Young à tout ordre. A l'ordre $4n + 2$, on a $f(x) = \sum_{j=0}^{4n+2} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j + o(x^{4n+2})$.

Par unicité du développement limité, on a donc : si j s'écrit sous la forme $j = 4k + 2$, $(-1)^k = \frac{f^{(4k+2)}(0)}{(4k+2)!}$ c'est-à-dire $f^{(4k+2)}(0) = (-1)^k (4k+2)!$ et si j ne s'écrit pas sous la forme $4k + 2$, $0 = \frac{f^{(j)}(0)}{j!}$ c'est-à-dire $f^{(j)}(0) = 0$.

Exercice 15.—

1. On définit la fonction $g : x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$. Elle est clairement dérivable et on calcule $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$. Comme la dérivée de g est nulle sur l'intervalle $]0, +\infty[$, la fonction est constante sur $]0, +\infty[$ et vaut $g(1) = 2 \arctan(1) = \frac{\pi}{2}$.
2. La formule de Taylor-Young dit que (*) : $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$. En effet, $\arctan$ est de classe C^∞ et on calcule les dérivées de $\arctan$ jusqu'à l'ordre 3 en 0. On a successivement $(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $(\arctan)''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $(\arctan)^{(3)}(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$, ce qui donne $(\arctan)'(0) = 1$, $(\arctan)''(0) = 0$ et $(\arctan)^{(3)}(0) = -2$. Comme la fonction $\arctan$ est impaire, on sait que ses dérivées d'ordre pair s'annulent en 0 donc $\arctan^{(4)}(0) = 0$ (cette remarque permet d'éviter le calcul de la dérivée 4ième). D'où la formule (*).

D'après 1), on a : $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}$ pour tous les $x > 0$. Quand x tend vers $+\infty$, $1/x$ tend vers 0^+ . On peut donc développer : $\arctan \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x}\right)^3 + o(1/x^4)$ et donc

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + o(1/x^4).$$

3. On a le développement :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) \\ &= x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + o(1/x^4) \right) \\ &= x - \frac{1}{3x} + o(1/x^2) \end{aligned}$$

On a donc $f(x) - x = -\frac{1}{3x} + o(1/x^2)$.

Comme le second membre tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, on en déduit que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f est asymptote à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

On a plus précisément $f(x) - x = \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{3} + o(1/x) \right)$. Comme $-\frac{1}{3} + o(1/x)$ tend vers $-1/3$ quand x tend vers $+\infty$, il en résulte que cette expression est < 0 pour x assez grand. Par ailleurs, on a $1/x > 0$. On a donc $f(x) - x < 0$ pour x assez grand. Il en résulte que $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de son asymptote $\mathcal{D}$ pour les x assez grands.

Exercice 16.—

1. La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme composée et produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = e^{x^2} + x \times (2xe^{x^2}) = (1 + 2x^2)e^{x^2}.$$

Comme $e^{x^2} > 0$ et $1 + 2x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ tout entier. La fonction f est donc strictement croissante. D'après le théorème 2.6 du cours, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $] \lim_{x \rightarrow -\infty} f, \lim_{x \rightarrow +\infty} f[$. Puisque nous avons

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{x^2} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{x^2} = +\infty,$$

il s'agit donc d'une bijection de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

2. La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et f' ne s'annule pas. D'après le théorème 1.14 du cours, la bijection réciproque de f est donc elle aussi $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Elle admet ainsi un développement limité en 0 à tout ordre : il s'agit en effet d'une conséquence de la formule de Taylor-Young.

3. D'après la question 2, la fonction f^{-1} admet un développement limité d'ordre 5 en 0. Il existe donc des constantes réelles a_i pour $i = 0 \dots 5$ telles que :

$$f^{-1}(y) = a_0 + a_1 \cdot y + a_2 \cdot y^2 + a_3 \cdot y^3 + a_4 \cdot y^4 + a_5 \cdot y^5 + o(y^6)$$

lorsque $y \rightarrow 0$. Remarquons que $f^{-1}(0) = 0$ car $f(0) = 0$, donc $a_0 = 0$. En appliquant à $u = x^2$ le développement limité en 0 de $u \mapsto e^u$, nous obtenons que :

$$f(x) = xe^{x^2} = x \times \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) = x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5).$$

Ainsi, quand $x \rightarrow 0$:

$$f(x)^2 = \left(x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)\right)^2 = x^2 + 2x^4 + o(x^5);$$

$$f(x)^3 = \left(x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)\right) \times \left(x^2 + 2x^4 + o(x^5)\right) = x^3 + 3x^5 + o(x^5);$$

$$f(x)^4 = \left(x^3 + 3x^5 + o(x^5)\right) \times \left(x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)\right) = x^4 + o(x^5);$$

$$f(x)^5 = \left(x^4 + o(x^5)\right) \times \left(x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)\right) = x^5 + o(x^5).$$

En composant maintenant avec le développement limité en 0 de f^{-1} , nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= a_1 \cdot \left(x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^5)\right) + a_2 \cdot \left(x^2 + 2x^4 + o(x^5)\right) + a_3 \cdot \left(x^3 + 3x^5 + o(x^5)\right) \\ &\quad + a_4 \cdot \left(x^4 + o(x^5)\right) + a_5 \cdot \left(x^5 + o(x^5)\right) \\ &= a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + (a_1 + a_3) \cdot x^3 + (2a_2 + a_4) \cdot x^4 + \left(\frac{a_1}{2} + 3a_3 + a_5\right) \cdot x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Nous savons également que $f^{-1}(f(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par unicité du développement limité, nous avons donc :

$$a_1 = 1;$$

$$a_2 = 0;$$

$$a_1 + a_3 = 0 \Leftrightarrow a_3 = -1 \text{ (car } a_1 = 1);$$

$$2a_2 + a_4 = 0 \Leftrightarrow a_4 = 0 \text{ (car } a_2 = 0);$$

$$\frac{a_1}{2} + 3a_3 + a_5 = 0 \Leftrightarrow a_5 = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2} \text{ (car } a_1 = 1 \text{ et } a_3 = -1).$$

Ainsi, quand $x \rightarrow 0$:

$$f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + o(x^5).$$

4. La fonction g est $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $I :=]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ comme somme de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur I . Pour tout $x \in I$, on a :

$$g'(x) = 2 \tan'(x) - 1 = 2 + 2 \tan^2(x) - 1 = 1 + 2 \tan^2(x).$$

Comme $\tan^2(x) \geq 0$, on en déduit que g' est strictement positive sur I . La fonction g est donc strictement croissante sur I . D'après le théorème 2.6 du cours, elle réalise une bijection de I dans $] \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} g(x), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g(x)[$. Mais puisque nous avons

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} 2 \tan(x) - x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 2 \tan(x) - x = +\infty,$$

il s'agit d'une bijection de I dans $\mathbb{R}$.

En imitant le raisonnement de la question 2, on obtient que la bijection réciproque $g^{-1} : \mathbb{R} \mapsto I$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et admet donc (grâce à la formule de Taylor-Young) un développement limité en 0 à tout ordre. En particulier, il existe des constantes réelles a_i pour $i = 0 \dots 5$ telles que :

$$g^{-1}(y) = a_0 + a_1 \cdot y + a_2 \cdot y^2 + a_3 \cdot y^3 + a_4 \cdot y^4 + a_5 \cdot y^5 + o(y)$$

lorsque $y \rightarrow 0$. Remarquons que $g^{-1}(0) = 0$ car $g(0) = 0$, donc $a_0 = 0$.

On sait que lorsque $x \rightarrow 0$:

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

Voir par exemple la remarque juste au-dessus de la proposition 4.11 du polycopié de cours. Ainsi, au voisinage de 0, on a :

$$g(x) = 2 \tan(x) - x = x + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + o(x^5)$$

et :

$$\begin{aligned} g(x)^2 &= \left(x + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + o(x^5)\right)^2 = x^2 + \frac{4x^4}{3} + o(x^5); \\ g(x)^3 &= \left(x^2 + \frac{4x^4}{3} + o(x^5)\right) \times \left(x + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + o(x^5)\right) = x^3 + 2x^5 + o(x^5); \\ g(x)^4 &= \left(x^3 + 2x^5 + o(x^5)\right) \times \left(x + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + o(x^5)\right) = x^4 + o(x^5); \\ g(x)^5 &= \left(x^4 + o(x^5)\right) \times \left(x + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + o(x^5)\right) = x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

En composant maintenant avec le développement limité en 0 de g^{-1} , nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} g^{-1}(g(x)) &= a_1 \cdot \left(x + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + o(x^5)\right) + a_2 \cdot \left(x^2 + \frac{4x^4}{3} + o(x^5)\right) + a_3 \cdot (x^3 + 2x^5 + o(x^5)) \\ &\quad + a_4 \cdot (x^4 + o(x^5)) + a_5 \cdot (x^5 + o(x^5)) \\ &= a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \left(\frac{2a_1}{3} + a_3\right) \cdot x^3 + \left(\frac{4a_2}{3} + a_4\right) \cdot x^4 + \left(\frac{4a_1}{15} + 2a_3 + a_5\right) \cdot x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

Nous savons également que $g^{-1}(g(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par unicité du développement limité, nous avons donc :

$$a_1 = 1;$$

$$a_2 = 0;$$

$$\frac{2a_1}{3} + a_3 = 0 \Leftrightarrow a_3 = -\frac{2}{3} \text{ (car } a_1 = 1);$$

$$\frac{4a_2}{3} + a_4 = 0 \Leftrightarrow a_4 = 0 \text{ (car } a_2 = 0);$$

$$\frac{4a_1}{15} + 2a_3 + a_5 = 0 \Leftrightarrow a_5 = -\frac{4}{15} + \frac{4}{3} = \frac{16}{15} \text{ (car } a_1 = 1 \text{ et } a_3 = -\frac{2}{3}).$$

Ainsi, quand $x \rightarrow 0$:

$$g^{-1}(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{16}{15}x^5 + o(x^5).$$