

Module MDD151 : Calcul intégral

Corrigé de la feuille d'exercices numéro 5

Équations différentielles

Exercice 1.— On rappelle le résultat suivant : soit I un intervalle et $t \mapsto a(t)$ une fonction continue sur I , à valeurs réelles. On note A une primitive de la fonction a sur I . Alors les solutions de l'équation $y' + a(t)y = 0$ s'écrivent $y : t \mapsto Ce^{-A(t)}$ pour tout $t \in I$, C étant une constante réelle.

a) Les solutions de $y' - y = 0$ s'écrivent $y(t) = Ce^t$.

b) Pour résoudre l'équation $(E) : ty' - 2y = 0$, on commence par résoudre l'équation $y' - \frac{2}{t}y = 0$ sur $]0, +\infty[$ et sur $] - \infty, 0[$.

Sur $]0, +\infty[$, une primitive de la fonction $a(t) = -\frac{2}{t}$ est $A(t) = -2\ln(t) = -\ln(t^2)$, et donc les solutions (E) sur $]0, +\infty[$ s'écrivent $y(t) = C_1 e^{\ln(t^2)} = C_1 t^2$ où $C_1 \in \mathbb{R}$.

Sur $] - \infty, 0[$, une primitive de la fonction $a(t) = -\frac{2}{t}$ est $A(t) = -2\ln(-t) = -\ln(t^2)$, et donc les solutions (E) sur $] - \infty, 0[$ s'écrivent aussi $y(t) = C_2 t^2$ où $C_2 \in \mathbb{R}$.

On considère une solution y de (E) sur un intervalle J . Supposons d'abord que $0 \notin J$. Soit $J \subset]0, +\infty[$, et alors $y(t) = C_1 t^2$, soit $J \subset] - \infty, 0[$, et alors $y(t) = C_2 t^2$ également. Et il n'y a qu'elles. Supposons maintenant que $0 \in J$, alors $y(t) = C_1 t^2$ pour $t \in J \cap] - \infty, 0[$ et $y(t) = C_2 t^2$ pour $t \in J \cap]0, +\infty[$. On doit aussi avoir $y(0) = 0$ (par exemple en faisant $t = 0$ dans l'équation (E)). Réciproquement, dans ce dernier cas (le cas où $0 \in J$), considérons la fonction y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = C_1 t^2$ si $t < 0$, $y(t) = C_2 t^2$ si $t > 0$ et $y(0) = 0$. Il est facile de voir que y est continue en $t = 0$ (car on a $\lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = 0 = y(0)$) et dérivable en $t = 0$ (car $\lim_{t \rightarrow 0^-} y'(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y'(t) = 0$) et est solution de l'équation. On a montré que si $0 \in J$, alors les solutions de (E) s'écrivent $y(t) = C_1 t^2$ si $t < 0$, $y(t) = C_2 t^2$ si $t > 0$ et $y(0) = 0$.

c) Ici, on peut être astucieux (si on veut). On voit que $((1 + t^3)y)' = (1 + t^3)y' + 3t^2y$, donc l'équation différentielle $(1 + t^3)y' + 3t^2y = 0$ est équivalente à $((1 + t^3)y)' = 0$. Donc la fonction $t \mapsto (1 + t^3)y(t)$ est constante sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$. On en déduit que sur $] - \infty, -1[$, on a $y(t) = \frac{C}{1+t^3}$; sur $] - 1, +\infty[$, on a $y(t) = \frac{C}{1+t^3}$; et sur tout intervalle J contenant $t = -1$, la seule solution est la solution $y(t) = 0$.

d) On cherche une primitive (sur $\mathbb{R}$) de $a(t) = t \sin(t)$. En intégrant par parties, on a :

$$A(t) = \int^t x \sin(x) dx = [-x \cos(x)]^t + \int^t \cos(x) dx = -t \cos(t) + \sin(t).$$

Les solutions de l'équation $y' + t \sin(t)y = 0$ s'écrivent donc, sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $y(t) = Ce^{t \cos(t) - \sin(t)}$.

e) Une primitive (sur $\mathbb{R}$) de $t \mapsto a(t) = \frac{2}{1+t^2}$ est $t \mapsto A(t) = 2 \arctan(t)$. On en déduit que les solutions de $(1+t^2)y' + 2y = 0$ s'écrivent, sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $y(t) = Ce^{-2 \arctan(t)}$.

e) Ici encore, on peut être astucieux si on veut. On pose $y(t) = (e^t + 1)z(t)$. L'équation $(e^t + 1)y' - e^t y = 0$ devient $(e^t + 1)((e^t + 1)z'(t) + e^t z(t)) - (e^t + 1)e^t z(t) = 0$. Après une simplification on obtient l'équation $(e^t + 1)^2 z'(t) = 0$ qui est équivalente à $z'(t) = 0$ car $e^t + 1 > 0$ pour tout t . On en déduit que $z(t) = C$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$, donc $y(t) = C(e^t + 1)$.

On pourra également écrire l'équation sous forme $y'(t) - a(t)y(t) = 0$ avec $a(t) = \frac{e^t}{e^t + 1}$. Comme $a(t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$ définie par

$$A(t) = \int_0^t \frac{e^x}{e^x + 1} dx = [\ln(e^x + 1)]_0^t = \ln(e^t + 1) - \ln(2).$$

La constante $\ln(2)$ sera absorbée dans la constante C à la fin, donc on prend $A(t) = \ln(e^t + 1)$. Les solutions de l'équation $y'(t) - a(t)y(t) = 0$ sont de la forme:

$$y(t) = Ce^{\ln(e^t + 1)} = C(e^t + 1),$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

Exercice 2.—

1) $y' + y = \frac{1}{1+e^t}$. On pose $z(t) = e^t y(t)$, et l'équation devient $z'(t) = \frac{e^t}{1+e^t}$. La solution $z(t)$ s'écrit donc

$$z(t) = z(0) + \int_0^t \frac{e^x}{1+e^x} dx = C + \ln(e^t + 1).$$

On obtient une solution de classe C^1 sur $\mathbb{R}$: $y(t) = e^{-t} z(t) = e^{-t}(C + \ln(e^t + 1))$, avec $C \in \mathbb{R}$ une constante.

2) $ty'(t) - y(t) = t^2$.

D'abord, on résout l'équation sur un intervalle I ne contenant pas 0. On pose $z(t) = t^{-1}y(t)$, donc $y(t) = tz(t)$ et $y'(t) = tz'(t) + z(t)$, $ty'(t) - y(t) = t^2 z'(t)$. L'équation devient

$$t^2 z'(t) = t^2.$$

En divisant par $t^2 \neq 0$, l'équation devient $z'(t) = 1$. La solution est donc $z(t) = t + C$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. La solution $y(t)$ est donnée par

$$y(t) = tz(t) = t^2 + tC.$$

Soit maintenant I un intervalle contenant 0. Une solution $y(t)$ de classe C^1 sur I s'écrit (d'après la première étape):

$$y(t) = \begin{cases} t^2 + C_1 t, & \text{si } t \in I \cap]-\infty, 0[\\ t^2 + C_2 t, & \text{si } t \in I \cap]0, +\infty[\end{cases}.$$

Comme y est de classe C^1 sur I , on vérifie facilement que

$$C_1 = \lim_{t \rightarrow 0^-} y'(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y'(t) = C_2.$$

Réciproquement une fonction $y(t)$ donnée par $y(t) = t^2 + Ct$ est une solution de l'équation.
Conclusions: les solutions sur un intervalle I contenant 0 est

$$y(t) = t^2 + Ct,$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

3) $y'(t) + y(t) = \sin(t)$. On pose $z(t) = e^t y(t)$. L'équation devient $z'(t) = e^t \sin(t)$. Les solutions s'écrivent

$$z(t) = z(0) + \int_0^t e^x \sin(x) dx.$$

En intégrant par parties (deux fois) on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^t e^x \sin(x) dx &= [e^x \sin(x)]_0^t - \int_0^t e^x \cos(x) dx \\ &= e^t \sin(t) - [e^x \cos(x)]_0^t - \int_0^t e^x \sin(x) dx. \end{aligned}$$

On remarque le terme $\int_0^t e^x \sin(x) dx$ apparaît sur les deux cotés (avec signes opposés heureusement!). En basculant un sur le coté de l'autre on obtient

$$\int_0^t e^x \sin(x) dx = \frac{e^t \sin(t) - e^t \cos(t) + 1}{2}.$$

La solution générale $y(t)$ s'écrit

$$y(t) = e^{-t} z(t) = e^{-t} \left(C + \frac{e^t (\sin(t) - \cos(t))}{2} \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

4) $y'(t) + 2y(t) = t^2 + 2t$. On pose $z(t) = e^{2t} y(t)$. L'équation devient

$$z'(t) = e^{2t} (y'(t) + 2y(t)) = (t^2 + 2t) e^{2t}.$$

Donc $z(t)$ est donnée par

$$z(t) = z(0) + \int_0^t (x^2 + 2x) e^{2x} dx.$$

En intégrant par parties (deux fois) on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_0^t (x^2 + 2x)e^{2x} dx &= \left[\frac{(x^2 + 2x)e^{2x}}{2} \right]_0^t - \int_0^t (x + 1)e^{2x} dx \\
 &= \frac{(t^2 + 2t)e^{2t}}{2} - \left[\frac{(x + 1)e^{2x}}{2} \right]_0^t + \int_0^t \frac{e^{2x}}{2} dx \\
 &= \frac{(t^2 + t - 1)e^{2t}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{e^{2t} - 1}{4} \\
 &= \frac{(2t^2 + 2t - 1)e^{2t}}{4} + \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

La solution générale $y(t)$ est donnée par

$$y(t) = e^{-2t} z(t) = e^{-2t} \left(\frac{(2t^2 + 2t - 1)e^{2t}}{4} + C \right) = Ce^{-2t} + \frac{2t^2 + 2t - 1}{4}, \quad t \in \mathbb{R},$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

5) $y'(t) + 2ty(t) = 2te^{-t^2}$. On cherche une primitive $A(t)$ de la fonction $a(t) = 2t$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On prend $A(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$. On pose $z(t) = e^{A(t)}y(t) = e^{t^2}y(t)$. L'équation devient

$$z'(t) = e^{t^2}(y'(t) + 2ty(t)) = e^{t^2}2te^{-t^2} = 2t.$$

On trouve $z(t) = t^2 + C$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. La solution générale $y(t)$ s'écrit

$$y(t) = e^{-t^2} z(t) = (C + t^2)e^{-t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

6) $y'(t) + 3t^2y(t) = (3t^2 - 1)e^{-t}$. On cherche une primitive $A(t)$ de $a(t) = 3t^2$ et on trouve $A(t) = t^3$. On pose $z(t) = e^{A(t)}y(t) = e^{t^3}y(t)$ et l'équation devient

$$z'(t) = e^{t^3}(y'(t) + 3t^2y(t)) = e^{t^3}(3t^2 - 1)e^{-t} = (3t^2 - 1)e^{t^3-t}.$$

Au premier regard c'est horrible! mais on remarque que $(t^3 - t)' = 3t^2 - 1$. Donc $z(t)$ s'écrit

$$z(t) = e^{t^3-t} + C,$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. La solution générale $y(t)$ est donnée par

$$y(t) = e^{-t^3} z(t) = e^{-t^3}(e^{t^3-t} + C) = e^{-t} + Ce^{-t^3}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

7) $y'(t) + t^2y(t) = t^2$. On cherche une primitive $A(t)$ de $a(t) = t^2$ et on trouve $A(t) = t^3/3$. On pose $z(t) = e^{A(t)}y(t) = e^{t^3/3}y(t)$ et l'équation devient

$$z'(t) = e^{t^3/3}(y'(t) + t^2y(t)) = e^{t^3/3}t^2.$$

Au premier regard c'est horrible! mais on remarque que $(t^3/3)' = t^2$. Donc $z(t)$ s'écrit

$$z(t) = e^{t^3/3} + C,$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante. La solution générale $y(t)$ est donnée par

$$y(t) = e^{-t^3/3} z(t) = e^{-t^3/3} (e^{t^3} + C) = 1 + Ce^{-t^3/3}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.—

1) Soit (E) l'équation différentielle $t^2 y' - y = 0$. Sur $]0, +\infty[$ ou sur $] -\infty, 0[$, elle s'écrit $(F) : y' - \frac{1}{t^2} y = 0$. Les solutions de (F) s'écrivent $y(t) = ae^{-1/t}$ sur $]0, +\infty[$ (idem sur $] -\infty, 0[$).

(Analyse du problème) Si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, elle s'écrit donc nécessairement $y(t) = ae^{-1/t}$ sur $]0, +\infty[$ et $y(t) = be^{-1/t}$ sur $] -\infty, 0[$. En $t = 0$, elle doit vérifier $0^2 y'(0) - y(0) = 0$ donc $y(0) = 0$. Mais y doit être au moins continue sur $\mathbb{R}$, donc continue en $t = 0$! Cela implique la condition $b = 0$ car $\lim_{t \rightarrow 0^-} e^{-1/t} = +\infty$. Donc nécessairement y s'écrit $y(t) = ae^{-1/t}$ sur $]0, +\infty[$ et $y(t) = 0$ sur $] -\infty, 0[$. On a $y'(t) = \frac{a}{t^2} e^{-1/t}$ sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = 0$ par croissances comparées. Donc ces fonctions sont dérivables en 0 et finalement dérivables sur $\mathbb{R}$.

(Synthèse) Réciproquement, les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = ae^{-1/t}$ si $t > 0$ et $y(t) = 0$ si $t \leq 0$ (où a est une constante réelle) sont bien solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.— On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 $(E) : y' + (t-1)y = t^2$.

1) On nous demande de commencer par chercher une solution particulière de (E) sous la forme d'une fonction affine $y : t \mapsto at + b$. On a $y'(t) = a$ et donc, cette fonction y est solution de (E) si et seulement si $a + (t-1)(at+b) = t^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On développe $a + (t-1)(at+b) = at^2 + (b-a)t + a-b$ et donc, cette fonction affine y est solution de (E)

si et seulement si
$$\begin{cases} a &= 1 \\ -a+b &= 0 \\ a-b &= 0 \end{cases}.$$
 On a trouvé une solution particulière $y(t) = t + 1$.

2) On cherche maintenant la solution générale de l'équation homogène (H) associée à l'équation (E) . On résout donc $(H) : y' + (t-1)y = 0$. Une primitive de la fonction $a : t \mapsto t-1$ est la fonction $A : t \mapsto \frac{1}{2}t^2 - t$. On en déduit que la solution générale de l'équation homogène (H) est donnée par $y(t) = Ce^{\frac{1}{2}t^2 - t}$ où C est réel.

On en déduit que la solution générale de l'équation complète (E) qui s'écrit comme la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation (E) est donnée par

$$y(t) = Ce^{\frac{1}{2}t^2 - t} + t + 1.$$

La solution de (E) qui vérifie la condition (de Cauchy) $y(2) = 2$ est donc telle que $Ce^{\frac{1}{2}4 - 2} + 2 + 1 = 2$, c'est-à-dire $C + 3 = 2$, donc $C = -1$. La solution cherchée s'écrit donc :

$$y(t) = -e^{\frac{1}{2}t^2 - t} + t + 1.$$

Exercice 5.—

1) La solution générale de $y' - y = 0$ s'écrit $y(t) = Ce^t$. On a $y(1) = Ce^1 = eC = 0$ donc

$C = 0$. La solution du problème de Cauchy proposé est la fonction nulle $y(t) = 0$.

2) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $a(t) = -te^{t^2}$ est $A(t) = -\frac{1}{2}e^{t^2}$. La solution générale de $y' - te^{t^2}y = 0$ s'écrit donc $y(t) = Ce^{\frac{1}{2}e^{t^2}}$. On a $y(0) = Ce^{\frac{1}{2}} = 1$ donc $C = e^{-\frac{1}{2}}$ et la solution du problème de Cauchy proposé est la fonction $y(t) = e^{\frac{1}{2}(e^{t^2}-1)}$.

3) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $a(t) = -\sin(t)$ est $A(t) = \cos(t)$. La solution générale de $y' - \sin(t)y = 0$ s'écrit donc $y(t) = Ce^{-\cos(t)}$. On a $y(\frac{\pi}{3}) = Ce^{-\frac{1}{2}} = -2$. On a donc $C = -2e^{\frac{1}{2}}$ et la solution du problème de Cauchy proposé est la fonction $y(t) = -2e^{-\cos(t)+\frac{1}{2}}$.

4) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $a(t) = -\frac{1}{1+t^2}$ est $A(t) = -\arctan(t)$. La solution générale de $y' - \frac{1}{1+t^2}y = 0$ s'écrit donc $y(t) = Ce^{\arctan(t)}$. On a $y(\sqrt{3}) = Ce^{\frac{\pi}{3}} = 1$ donc $C = e^{-\frac{\pi}{3}}$. La solution du problème de Cauchy proposé est la fonction $y(t) = e^{\arctan(t)-\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 6.—Dans cet exercice, on appliquera toujours la méthode de résolution suivante. On commencera par résoudre l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 en trouvant les racines de l'équation caractéristique associée. On identifiera ensuite l'unique solution de notre problème de Cauchy en évaluant ces solutions en $t = 0$, ce qui nous donnera à résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

1. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est $X^2 + X - 2 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$. Elle admet donc deux solutions réelles distinctes $x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = -2$. Par conséquent, d'après le cours, toutes les solutions $t \mapsto y(t)$ de l'équation différentielle linéaire homogène (d'ordre 2) $y'' + y - 2 = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda e^t + \mu e^{-2t},$$

avec λ, μ des constantes réelles. En particulier, lorsque $t = 0$, on a

$$y(0) = \lambda + \mu \quad \text{et} \quad y'(0) = (\lambda e^t + \mu e^{-2t})'_{|t=0} = (\lambda e^t - 2\mu e^{-2t})_{|t=0} = \lambda - 2\mu.$$

Comme on cherche l'unique fonction y vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$, les constantes λ et μ sont solutions du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= 0 \\ \lambda - 2\mu &= 1. \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient $\lambda = 1/3$ et $\mu = -1/3$. L'unique solution à notre problème de Cauchy est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$:

$$y(t) = \frac{1}{3}(e^t - e^{-2t}).$$

2. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est $X^2 + 1 = 0$. Cette équation admet deux solutions complexes non réelles distinctes $x_1 = i$ et $x_2 = -i$. D'après

le cours, toutes les solutions $t \mapsto y(t)$ de l'équation différentielle linéaire homogène (d'ordre 2) $y'' + 1 = 0$ sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda \cos(t) + \mu \sin(t),$$

avec λ, μ des constantes réelles. En particulier, lorsque $t = 0$, on a

$$y(0) = \lambda \quad \text{et} \quad y'(0) = (\lambda \cos(t) + \mu \sin(t))'_{|t=0} = (-\lambda \sin(t) + \mu \cos(t))_{|t=0} = \mu.$$

Comme on cherche l'unique fonction y vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$, on obtient $\lambda = \mu = 1$. L'unique solution à notre problème de Cauchy est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$:

$$y(t) = \cos(t) + \sin(t).$$

3. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est $X^2 - 2X + 1 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$. Elle admet donc une racine double $x = 1$. Par conséquent, d'après le cours, toutes les solutions $t \mapsto y(t)$ de l'équation différentielle linéaire homogène (d'ordre 2) $y'' - 2y + 1 = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda e^t + \mu t e^t,$$

avec λ, μ des constantes réelles. En particulier, lorsque $t = 0$, on a

$$y(0) = \lambda \quad \text{et} \quad y'(0) = (\lambda e^t + \mu t e^t)'_{|t=0} = (\lambda e^t + \mu e^t + \mu t e^t)_{|t=0} = \lambda + \mu.$$

Comme on cherche l'unique fonction y vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, les constantes λ et μ sont solutions du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} \lambda &= 1 \\ \lambda + \mu &= 0. \end{cases}$$

On obtient $\lambda = 1$ et $\mu = -1$. L'unique solution à notre problème de Cauchy est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$:

$$y(t) = (1 - t)e^t.$$

4. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est $X^2 + X + 1 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$. Elle admet donc deux solutions complexes non réelles distinctes $x_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Par conséquent, d'après le cours, toutes les solutions $t \mapsto y(t)$ de l'équation différentielle linéaire homogène (d'ordre 2) $y'' + y + 1 = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = e^{-t/2} \cdot (\lambda \cos(\sqrt{3}t/2) + \mu \sin(\sqrt{3}t/2)),$$

avec λ, μ des constantes réelles. En particulier, lorsque $t = 0$, on a $y(0) = \lambda$ et

$$\begin{aligned} y'(0) &= \left(e^{-t/2} \cdot (\lambda \cos(\sqrt{3}t/2) + \mu \sin(\sqrt{3}t/2)) \right)'_{|t=0} \\ &= \left(-\frac{1}{2} e^{-t/2} \cdot (\lambda \cos(\sqrt{3}t/2) + \mu \sin(\sqrt{3}t/2)) \right)_{|t=0} + \left(e^{-t/2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \lambda \sin(\sqrt{3}t/2) + \frac{\sqrt{3}}{2} \mu \cos(\sqrt{3}t/2) \right) \right)_{|t=0} \\ &= -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \mu. \end{aligned}$$

Comme on cherche l'unique fonction y vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$, les constantes λ et μ sont solutions du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} \lambda &= 1 \\ -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \mu &= 1. \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient $\lambda = 1$ et $\mu = \sqrt{3}$. L'unique solution à notre problème de Cauchy est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$:

$$y(t) = e^{-t/2} \cdot (\cos(\sqrt{3}t/2) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3}t/2)).$$

5. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est $X^2 + X = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 0 = 1 > 0$. Elle admet donc deux solutions réelles distinctes $x_1 = \frac{-1+1}{2} = 0$ et $x_2 = \frac{-1-1}{2} = -1$. Par conséquent, d'après le cours, toutes les solutions $t \mapsto y(t)$ de l'équation différentielle linéaire homogène (d'ordre 2) $y'' + y' = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda + \mu e^{-t},$$

avec λ, μ des constantes réelles. En particulier, lorsque $t = 0$, on a

$$y(0) = \lambda + \mu \quad \text{et} \quad y'(0) = (\lambda + \mu e^{-t})'_{|t=0} = (-\mu e^{-t})_{|t=0} = -\mu.$$

Comme on cherche l'unique fonction y vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$, les constantes λ et μ sont solutions du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= 1 \\ -\mu &= 1. \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient $\mu = -1$ et $\lambda = 2$. L'unique solution à notre problème de Cauchy est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$:

$$y(t) = 2 - e^{-t}.$$

6. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est $X^2 - 8X + 16 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 16 = 0$. Elle admet donc une racine double $x = 4$. Par conséquent, d'après le cours, toutes les solutions $t \mapsto y(t)$ de

l'équation différentielle linéaire homogène (d'ordre 2) $y'' - 8y + 16 = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda e^{4t} + \mu t e^{4t},$$

avec λ, μ des constantes réelles. En particulier, lorsque $t = 0$, on a

$$y(0) = \lambda \quad \text{et} \quad y'(0) = (\lambda e^{4t} + \mu t e^{4t})'_{|t=0} = (4\lambda e^{4t} + \mu e^{4t} + 4\mu t e^{4t})_{|t=0} = 4\lambda + \mu.$$

Comme on cherche l'unique fonction y vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$, les constantes λ et μ sont solutions du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} \lambda &= 1 \\ 4\lambda + \mu &= 2. \end{cases}$$

On obtient $\lambda = 1$ et $\mu = -2$. L'unique solution à notre problème de Cauchy est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$:

$$y(t) = (1 - 2t)e^{4t}.$$

Exercice 7.— 1. Soient a, b des constantes réelles et $y_0(t) = (a \cos(t) + b \sin(t))e^{-t}$, définie pour tout $t \in \mathbb{R}$. La fonction y_0 est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On calcule que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y_0'(t) &= (a \cos(t) + b \sin(t))' \times e^{-t} - (a \cos(t) + b \sin(t))e^{-t} \\ &= (-a \sin(t) + b \cos(t))e^{-t} - y_0(t), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_0''(t) &= (y_0'(t))' = ((-a \sin(t) + b \cos(t))e^{-t})' - y_0'(t) \\ &= (-a \sin(t) + b \cos(t))' \times e^{-t} - (-a \sin(t) + b \cos(t))e^{-t} - y_0'(t) \\ &= (-a \cos(t) - b \sin(t)) \times e^{-t} - (y_0'(t) + y_0(t)) - y_0'(t) \\ &= (-a \cos(t) - b \sin(t)) \times e^{-t} - 2y_0'(t) - y_0(t). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} y_0''(t) + y_0'(t) + 2y_0(t) &= (-a \cos(t) - b \sin(t)) \times e^{-t} - 2y_0'(t) - y_0(t) + y_0'(t) + 2y_0(t) \\ &= (-a \cos(t) - b \sin(t)) \times e^{-t} - y_0'(t) + y_0(t) \\ &= (-a \cos(t) - b \sin(t)) \times e^{-t} - (-a \sin(t) + b \cos(t))e^{-t} + 2y_0(t) \\ &= (-a \cos(t) - b \sin(t)) \times e^{-t} - (-a \sin(t) + b \cos(t))e^{-t} + 2(a \cos(t) + b \sin(t))e^{-t} \\ &= ((a - b) \cos(t) + (a + b) \sin(t))e^{-t}. \end{aligned}$$

Grâce à ce calcul, on peut voir que la fonction $y_0(t) = -\sin(t) \cdot e^{-t}$ (obtenue en choisissant $a = 0$ et $b = -1$) est une solution de l'équation différentielle $y''(t) + y'(t) + 2y(t) =$

$$(\cos(t) - \sin(t))e^{-t}.$$

2. Il s'agit de résoudre l'équation différentielle linéaire homogène $y'' + y' + 2y = 0$. L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle est $X^2 + X + 2 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0$. L'équation caractéristique admet donc deux solutions complexes non réelles distinctes $x_1 = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$. Par conséquent, d'après le cours, toutes les solutions $t \mapsto y(t)$ de l'équation différentielle linéaire homogène (d'ordre 2) $y'' + y' + 2y = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = e^{-t/2} \cdot (\lambda \cos(\sqrt{7}t/2) + \mu \sin(\sqrt{7}t/2))$$

avec λ, μ des constantes réelles.

3. Les solutions de l'équation différentielle

$$y''(t) + y'(t) + 2y(t) = (\cos(t) - \sin(t))e^{-t}$$

s'écrivent toutes sous la forme $y_0 + y$, avec y_0 solution particulière de cette équation, et y solution de l'équation différentielle homogène associée. Ainsi, d'après les questions 1 et 2, toutes les solutions $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ de l'équation proposée s'écrivent

$$-\sin(t) \cdot e^{-t} + e^{-t/2} \cdot (\lambda \cos(\sqrt{7}t/2) + \mu \sin(\sqrt{7}t/2)),$$

avec λ, μ des constantes réelles.

Exercice 8.— 1. Soit b une constante réelle et $y_0(t) = bt^2e^t$, fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$y'_0(t) = 2bte^t + bt^2e^t = 2bte^t + y_0(t)$$

et

$$y''_0(t) = (2bte^t)' + y'_0(t) = 2be^t + 2bte^t + y'_0(t) = 2be^t + y'_0(t) - y_0(t) + y'_0(t) = 2be^t + 2y'_0(t) - y_0(t).$$

Ainsi :

$$y''_0(t) - 2y'_0(t) + y_0(t) = 2be^t + 2y'_0(t) - y_0(t) - 2y'_0(t) + y_0(t) = 2be^t.$$

En posant $b = 1/2$, on obtient grâce à ce calcul que la fonction $y_0(t) = \frac{1}{2}t^2e^t$ est solution particulière de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = e^t$.

Cherchons maintenant toutes les solutions de l'équation différentielle homogène associée

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Dans l'exercice 6 (question 3), nous avons montré que celles-ci étaient les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda e^t + \mu te^t,$$

avec λ, μ des constantes réelles.

Nous pouvons maintenant conclure. Les solutions de l'équation différentielle $y'' - 2y + y = e^t$ s'écrivent toutes sous la forme $y_0 + y$, avec y_0 solution particulière de cette équation, et y solution de l'équation différentielle homogène associée. Ainsi, d'après ce qui précède, toutes les solutions $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ de l'équation proposée s'écrivent

$$\frac{1}{2}t^2e^t + \mu te^t + \lambda e^t = \left(\frac{1}{2}t^2 + \mu t + \lambda\right)e^t,$$

avec λ, μ des constantes réelles.

2. Soient a et b des constantes réelles et $y_0(t) = (at + b)e^{-t}$, fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$y_0'(t) = ae^{-t} - (at + b)e^{-t} = ae^{-t} - y_0(t)$$

et

$$y_0''(t) = (ae^{-t})' - y_0'(t) = -ae^{-t} - ae^{-t} + y_0(t) = -2ae^{-t} + y_0(t).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} y_0''(t) - 4y_0'(t) + y_0(t) &= -2ae^{-t} + y_0(t) - 4ae^{-t} + 4y_0(t) + y_0(t) \\ &= -6ae^{-t} + 6y_0(t) = (6at + 6(b - a))e^{-t}. \end{aligned}$$

En posant $a = 1/3$ et $b = 1/2$, on obtient grâce à ce calcul que la fonction $y_0(t) = (\frac{t}{3} + \frac{1}{2})e^{-t}$ est solution particulière de l'équation différentielle $y'' - 4y' + y = (2t + 1)e^{-t}$.

Cherchons maintenant toutes les solutions de l'équation différentielle homogène associée

$$y'' - 4y' + y = 0.$$

L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle est $X^2 - 4X + 1 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 12 > 0$. Elle admet donc deux solutions réelles distinctes $x_1 = \frac{4+\sqrt{12}}{2} = 2 + \sqrt{3}$ et $x_2 = \frac{4-\sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3}$. Par conséquent, d'après le cours, toutes les solutions $t \mapsto y(t)$ de l'équation différentielle linéaire homogène (d'ordre 2) $y'' - 4y' + y = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda e^{(2+\sqrt{3})t} + \mu e^{(2-\sqrt{3})t} = e^{2t} \cdot (\lambda e^{\sqrt{3}t} + \mu e^{-\sqrt{3}t}),$$

avec λ, μ des constantes réelles.

Nous pouvons maintenant conclure. Les solutions de l'équation différentielle $y'' - 4y' + y = (2t + 1)e^{-t}$ s'écrivent toutes sous la forme $y_0 + y$, avec y_0 solution particulière de cette équation, et y solution de l'équation différentielle homogène associée. Ainsi, d'après ce qui précède, toutes les solutions $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ de l'équation proposée s'écrivent

$$\left(\frac{t}{3} + \frac{1}{2}\right)e^{-t} + e^{2t} \cdot (\lambda e^{\sqrt{3}t} + \mu e^{-\sqrt{3}t}),$$

avec λ, μ des constantes réelles.

3. Soient a et b des constantes réelles et $y_0(t) = (at^2 + bt)e^t$, fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$y'_0(t) = (2at + b)e^t + (at^2 + bt)e^t = (2at + b)e^t + y_0(t)$$

et

$$\begin{aligned} y''_0(t) &= ((2at + b)e^t)' + y'_0(t) = 2ae^t + (2at + b)e^t + y'_0(t) \\ &= 2ae^t + y'_0(t) - y_0(t) + y'_0(t) = 2ae^t + 2y'_0(t) - y_0(t). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} y''_0(t) - 4y'_0(t) + 3y_0(t) &= 2ae^t + 2y'_0(t) - y_0(t) - 4y'_0(t) + 3y_0(t) \\ &= 2ae^t - 2y'_0(t) + 2y_0(t) \\ &= 2ae^t - 2(2at + b)e^t - 2y_0(t) + 2y_0(t) \\ &= (-4at + 2(a - b))e^t. \end{aligned}$$

En posant $a = -1/2$ et $b = -1$, on obtient grâce à ce calcul que la fonction $y_0(t) = (-\frac{1}{2}t^2 - t)e^t$ est solution particulière de l'équation différentielle $y'' - 4y + 3y = (2t + 1)e^t$.

Cherchons maintenant toutes les solutions de l'équation différentielle homogène associée

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est $X^2 - 4X + 3 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 > 0$. Elle admet donc deux solutions réelles distinctes $x_1 = \frac{4+\sqrt{4}}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{4-\sqrt{4}}{2} = 1$. Par conséquent, d'après le cours, toutes les solutions $t \mapsto y(t)$ de l'équation différentielle linéaire homogène (d'ordre 2) $y'' - 4y + 3y = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda e^{3t} + \mu e^t,$$

avec λ, μ des constantes réelles.

Nous pouvons maintenant conclure. Les solutions de l'équation différentielle $y'' - 4y + 3y = (2t + 1)e^t$ s'écrivent toutes sous la forme $y_0 + y$, avec y_0 solution particulière de cette équation, et y solution de l'équation différentielle homogène associée. Ainsi, d'après ce qui précède, toutes les solutions $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ de l'équation proposée s'écrivent

$$\left(-\frac{1}{2}t^2 - t\right)e^t + \lambda e^{3t} + \mu e^t = \left(-\frac{1}{2}t^2 - t + \mu\right)e^t + \lambda e^{3t},$$

avec λ, μ des constantes réelles.

Exercice 9.— L'équation différentielle $p'(t) = rp(t) \left(1 - \frac{p(t)}{k}\right)$ modélise l'évolution d'une population biologique dont la quantité de nourriture est limitée. La constante $r > 0$ est le taux de croissance idéal et $k > 0$ la capacité de l'environnement.

1. On résout cette équation. On remarque d'abord que les solutions constantes sont $p(t) = 0$ et $p(t) = r$. Soit I un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$ et $p(t)$ une solution de classe C^1 sur I telle que $p(t) \left(1 - \frac{p(t)}{k}\right) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$; on suppose que p est à valeurs strictement positives et ne prend jamais la valeur k . On obtient

$$\frac{p'(t)}{p(t) \left(1 - \frac{p(t)}{k}\right)} = r.$$

On cherche une primitive de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x(1 - x/k)}, \quad x \in D := \mathbb{R} \setminus \{0, k\}.$$

On développe $f(x)$ en éléments simples:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{k - x}.$$

Une primitive de f sur D est $F(x) = \ln |x| - \ln |k - x|$. L'équation à résoudre s'écrit

$$(F(p(t)))' = r.$$

On obtient $F(p(t)) = rt + C$ avec $C \in \mathbb{R}$ une constante. On injecte $F(x) = \ln |x| - \ln |k - x|$ dans la formule trouvée pour obtenir

$$\ln \left| \frac{p(t)}{k - p(t)} \right| = rt + C,$$

puis

$$\left| \frac{p(t)}{k - p(t)} \right| = e^{C+rt}.$$

Comme p est une fonction continue, l'image de l'intervalle I par p est un intervalle. Comme on a supposé que p ne prend jamais la valeur k , on a deux cas: soit $p(I) \subset]0, k[$ soit $p(I) \subset]k, +\infty[$.

Cas 1: $0 < p(t) < k$ pour tout $t \in I$. On obtient

$$\frac{p(t)}{k - p(t)} = e^{C+rt},$$

donc

$$p(t) = (k - p(t))e^{C+rt},$$

puis

$$p(t) = \frac{ke^{C+rt}}{1 + e^{C+rt}}.$$

Cette fonction est définie sur tout $\mathbb{R}$ et donne une solution de classe C^1 .

Cas 2: $p(t) > k$ pour tout $t \in I$. On trouve

$$\frac{p(t)}{p(t) - k} = e^{C+rt},$$

et on résout cette équation algébrique pour trouver $p(t)$ (en faisant le produit en croix) :

$$p(t) = \frac{ke^{C+rt}}{e^{C+rt} - 1}.$$

Cette fonction est définie pour $t > -C/r$, et elle est de classe C^1 sur cet intervalle.

2. Si $p(0) = k/2$ on est dans le premier cas: $p(t) \in]0, k[$ pour tout $t \in I$. La solution est

$$p(t) = \frac{ke^{C+kt}}{e^{C+kt} + 1}.$$

Soit $t = 0$:

$$\frac{k}{2} = p(0) = \frac{ke^C}{e^C + 1}.$$

On obtient $e^C = 1$ donc $C = 0$. La solution est donc

$$p(t) = k \frac{e^{rt}}{e^{rt} + 1}.$$

En écrivant

$$p(t) = k - \frac{k}{e^{rt} + 1},$$

on voit que $p(t)$ est croissante et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = k$ la capacité maximale de l'environnement.

Exercice 10.—

$$(1 + e^x)y(x)y'(x) = e^x.$$

L'équation est équivalente à

$$(y^2(x))' = \frac{2e^x}{1 + e^x} = (2 \ln(1 + e^x))'.$$

Sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ on obtient $y^2(x) = 2 \ln(1 + e^x) + 2C$ où C est une constante. La solution y est donc donnée par $y(x) = \sqrt{2} \sqrt{\ln(1 + e^x) + C}$, qui est de classe C^1 sur $D = \{x \in \mathbb{R} : \ln(1 + e^x) + C > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : e^x > e^{-C} - 1\}$. Si on veut avoir une solution de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, il faut que $D = \mathbb{R}$, donc $e^{-C} - 1 \leq 0$, ce qui signifie que $C \geq 0$.

$$e^x = \frac{y'(x)}{y(x) \ln(y(x))}.$$

On remarque que une fonction constante ne peut être solution, et que une solution $y(x)$ doit être positive et ne prend jamais la valeur 1. Soit I un intervalle dans $\mathbb{R}$ et $y : I \rightarrow]0, +\infty[$

une solution de classe C^1 sur I . On pose $f(u) = \frac{1}{u \ln u}$ pour $u \in D :=]0, +\infty[\setminus \{1\}$. Une primitive de f sur D est $F(u) = \ln |\ln(u)|$. On peut écrire l'équation comme

$$F(y(x))' = e^x.$$

On obtient $F(y(x)) = e^x + C$ sur I avec C une constante. Il suit que $|\ln(y(x))| = e^{e^x+C}$. On est maintenant embêté par la valeur absolue et comme d'habitude on va considérer deux cas. Comme $y(I)$ est un intervalle ne contenant pas 1 on a deux cas: soit $y(I) \subset]0, 1[$ soit $y(I) \subset]1, +\infty[$.

Cas 1: $0 < y(x) < 1$ pour tout $x \in I$. Alors $\ln(y(x)) < 0$ et on obtient $\ln(y(x)) = -e^{e^x+C}$, puis $y(x) = e^{-e^{e^x+C}}$.

Cas 2: $y(x) > 1$ pour tout $x \in I$. Alors $\ln(y(x)) > 0$ et on obtient $\ln(y(x)) = e^{e^x+C}$, puis $y(x) = e^{e^{e^x+C}}$.

$$1 + y(x) - (1 - x)y'(x) = 0.$$

Soit y une solution de classe C^1 sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On considère trois cas.

Cas 1: si y est constante, alors la constante doit être -1 .

Cas 2: $y(x) \neq -1$ pour tout $x \in I$. On est embêté par $x - 1$ qui peut être 0. On va considérer deux (sous)cas.

Cas 2.1: $1 \notin I$. Alors

$$\frac{y'(x)}{1 + y(x)} = \frac{1}{1 - x}, \quad \forall x \in I.$$

On réécrit cela comme

$$\ln(1 + y(x))' = (-\ln |1 - x|)'$$

(Il faut jamais oublier la valeur absolue !!), et on obtient $\ln(1 + y(x)) = C - \ln |1 - x|$ pour tout $x \in I$, où C est une constante. Il suit que

$$y(x) = \frac{e^C}{|1 - x|} - 1.$$

On remarque aussi que dans ce cas $y(x) \neq -1$ pour tout $x \in I$ car $\frac{e^C}{|1-x|}$ n'est jamais 0.

Cas 2.2: $1 \in I$. D'après le cas 1 on doit avoir

$$y(x) = \begin{cases} \frac{e^{C_1}}{|1-x|} - 1, & \text{si } x < 1 \\ \frac{e^{C_2}}{|1-x|} - 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Cette fonction n'est pas définie en $x = 1$ car $\lim_{x \rightarrow 1} y(x) = +\infty$. Ce cas est donc exclu.

Cas 3: il y a encore un cas (on oublie souvent ce cas mais c'est assuré par l'unicité, le théorème de Cauchy-Lipschitz que vous allez apprendre en L3 si vous passez les examens!) que l'on va exclure: il existe $x_0 \in I$ tel que $y(x_0) = -1$ mais y n'est pas constante sur I .

Alors il existe $x_1 \in I$ tel que $y(x_1) \neq -1$. On peut supposer que $x_0 < x_1$ (l'autre cas est similaire). On définit

$$x_2 := \sup\{x \in [x_0, x_1] : y(x) = -1\}.$$

Par continuité de y on a que $y(x_2) = -1$ et par définition $y(x) \neq -1$ pour tout $x \in]x_2, x_1[$. D'après le cas 2 traité plus haut on a que

$$y(x) = \frac{e^C}{|1-x|} - 1, \quad x \in]x_2, x_1[.$$

où C est une constante. Si on fait tendre $x \rightarrow x_2^-$ on voit que $y(x_2) \neq -1$, une contradiction.

Conclusion. Si $1 \notin I$ alors les solutions $y \in C^1(I)$ qui ne sont pas constantes sont

$$y(x) = \frac{e^C}{|1-x|} - 1,$$

où C est une constante. Si $1 \in I$ il y a une seule solution constante $y = -1$.

Une autre méthode. On a bien suivi le poly pour résoudre l'équation

$$1 + y(x) - (1-x)y'(x) = 0.$$

On pourra également employer une autre méthode plus astucieuse. On pose $z(x) := (1-x)y(x)$ et on dérive $z'(x) = (1-x)y'(x) - y(x)$. L'équation devient $z'(x) = 1$, donc $z(x) = x + C$ pour tout $x \in I$, où C est une constante. On trouve donc $(1-x)y(x) = x + C$. Si $1 \notin I$, les solutions sont

$$y(x) = \frac{x + C}{1-x}.$$

Si $1 \in I$ alors la seule solution de classe C^1 est $y(x) = -1$ (lorsque $C = -1$, sinon y n'est pas définie en $x = 1$).

$$x(y(x)^2 - 1) - y(x)(x^2 - 1)y'(x) = 0.$$

Soit $y(x)$ une solution de classe C^1 sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On pose $z(x) = y^2(x) - 1$ et on obtient l'équation pour $z(x)$:

$$(x^2 - 1)z'(x) = 2xz(x).$$

Étape 1: On résout cette équation pour trouver $z(x)$. On veut diviser par $x^2 - 1$, donc on considère deux cas.

Cas 1: $\{\pm 1\} \cap I = \emptyset$. En divisant par $x^2 - 1$ on obtient

$$z'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}z(x).$$

La fonction $a(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$ est continue sur I et une de ses primitives est $A(x) = \ln |x^2 - 1|$. La solution générale est donnée par

$$z(x) = Ce^{A(x)} = C|x^2 - 1|,$$

où C est une constante. Comme $x^2 - 1$ ne change pas de signe sur I (car I est un intervalle ne contenant pas ± 1), on peut écrire la solution générale comme

$$z(x) = C(x^2 - 1), \quad x \in I.$$

Cas 2: $\{\pm 1\} \cap I \neq \emptyset$. D'après le cas 1 on a

$$y(x) = \begin{cases} C_1(x^2 - 1), & x \in I \cap]-\infty, -1[, \\ C_2(x^2 - 1), & x \in I \cap]-1, 1[, \\ C_3(x^2 - 1), & x \in I \cap]1, +\infty[\end{cases},$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes. Par continuité de y on a que $y(1) = y(-1) = 0$. On calcule la dérivée de y :

$$y'(x) = \begin{cases} 2C_1x, & x \in I \cap]-\infty, -1[, \\ 2C_2x, & x \in I \cap]-1, 1[, \\ 2C_3x, & x \in I \cap]1, +\infty[\end{cases}.$$

Comme y' est continue sur I on doit avoir $C_1 = C_2 = C_3$, puis $y(x) = C(x^2 - 1)$ pour tout $x \in I$.

Étape 2: On résout y . On a $y^2(x) - 1 = C(x^2 - 1)$ pour tout $x \in I$. On veut prendre la racine carrée et on distingue deux cas.

Cas 1: il existe $x_0 \in I$ tel que $y(x_0) = 0$. On injecte x_0 dans l'équation au début pour trouver $x_0 = 0$, puis $C = 1$. On obtient donc $y^2(x) = x^2$, donc pour chaque $x \in I$ on a soit $y(x) = x$ ou $y(x) = -x$ (attention, cela ne veut pas dire qu'on n'a que deux solutions! Pour l'instant on ne sait pas encore). On dérive cette identité pour trouver $2y(x)y'(x) = 2x$ puis $y'(x) \in \{\pm 1\}$. Comme $y'(I)$ est un intervalle, il nous reste que deux cas: soit $y'(x) = 1$ pour tout $x \in I$ et dans ce cas $y(x) = x$, soit $y'(x) = -1$ pour tout $x \in I$ et dans ce cas $y(x) = -x$.

Cas 2: $0 \notin y(I)$. Dans ce cas C doit vérifier $C(x^2 - 1) + 1 > 0$ pour tout $x \in I$ et on a deux solutions:

$$y_1(x) = \sqrt{Cx^2 + 1 - C}, \quad y_2(x) = -\sqrt{Cx^2 + 1 - C}.$$

Exercice 11.— 1. Supposons $m \neq 0$ ainsi l'équation est équivalente à:

$$x''(t) + \frac{k}{m} x'(t) = g.$$

Si l'on pose $y(t) = x'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors y vérifie l'équation du premier ordre linéaire suivante:

$$y'(t) + \frac{k}{m}y(t) = g. \quad (*)$$

Nous remarquons tout de suite que la fonction constante $y_0(t) = \frac{mg}{k}$ est une solution particulière de cette équation. Pour obtenir l'ensemble de toutes les solutions calculons les solutions de l'équation homogène:

$$y'(t) + \frac{k}{m}y(t) = 0.$$

Elles sont sous la forme: $y(t) = \lambda e^{-\frac{k}{m}t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$. Ainsi toutes les solutions de l'équation avec second membre sont de la forme:

$$y(t) = \frac{mg}{k} + \lambda e^{-\frac{k}{m}t}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$. Aussi, la condition $x'(0) = y(0) = v_0$ fixe la valeur de λ :

$$y(0) = \frac{mg}{k} + \lambda = v_0$$

donc $\lambda = v_0 - \frac{mg}{k}$, soit

$$y(t) = \frac{mg}{k} + (v_0 - \frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}t}$$

est la solution de l'équation $(*)$ satisfaisant $y(0) = v_0$.

2. Il s'agit ensuite de résoudre l'équation $x'(t) = y(t)$ soit chercher les primitives de y . Ainsi

$$x(t) = \frac{mg}{k}t - \frac{m}{k}(v_0 - \frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}t} + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$. Le paramètre c étant fixé par la condition $x(0) = x_0$ soit

$$c_0 = x_0 + \frac{m}{k}(v_0 - \frac{mg}{k}).$$

La solution $x : t \mapsto x(t)$ possède une asymptote quand $t \rightarrow +\infty$ car

$$x(t) - \frac{mg}{k}t - c_0 = -\frac{m}{k}(v_0 - \frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}t}$$

et $-\frac{m}{k}(v_0 - \frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}t} \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. L'équation de cette asymptote est :

$$y = \frac{mg}{k}x + c_0$$

la position de la courbe représentant $x(t)$ est placée au-dessus de l'asymptote si

$$-\frac{m}{k}(v_0 - \frac{mg}{k}) > 0$$

et en-dessous sinon.

Par contre lorsque $t \rightarrow -\infty$ $x(t) \rightarrow +\infty$ si $-\frac{m}{k}(v_0 - \frac{mg}{k}) > 0$ et $x(t) \rightarrow -\infty$ si $-\frac{m}{k}(v_0 - \frac{mg}{k}) < 0$.

Exercice 12.— On va montrer que toute solution de $y'' + ay' + by = 0$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si

$$(a, b) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad a, b \geq 0.$$

L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle est $X^2 + aX + b = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = a^2 - 4b$.

1ère étape : le cas $\Delta > 0$

Supposons dans un premier temps que $\Delta > 0$, c'est-à-dire $a^2 > 4b$. Les racines de l'équation caractéristique sont alors

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2}.$$

D'après le cours, toutes les solutions $t \mapsto y(t)$ de l'équation différentielle linéaire homogène (d'ordre 2) $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \lambda e^{x_1 t} + \mu e^{x_2 t},$$

avec λ, μ des constantes réelles. Les fonctions y s'écrivant comme ci-dessus sont bornées sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si les racines x_1 et x_2 sont toutes les deux négatives ou nulles (car sinon l'une des exponentielles divergeraient vers $\pm\infty$). Ceci ne peut pas se produire si $a \leq 0$. En effet, nous aurions alors forcément :

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2} &\geq \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad (\text{car } -a \geq 0) \\ &> 0 \quad (\text{car on a supposé } \Delta > 0). \end{aligned}$$

Que toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ soient bornées sur $\mathbb{R}_+$, lorsque $\Delta > 0$, implique donc forcément que $a > 0$. Montrons maintenant la proposition réciproque. Supposons $a > 0$ et cherchons un critère sur b pour s'assurer que les racines x_1 et x_2 de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle soient négatives ou nulles. Quand $a > 0$, nous avons :

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \frac{-a + a\sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}}{2} = \frac{a}{2} \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}} - 1 \right)$$

Ainsi :

$$x_1 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}} \leq 1.$$

Il est clair que la dernière inégalité est vérifiée si et seulement si $b \geq 0$. Quant à la racine x_2 , elle est alors toujours négative quand $a > 0$ car son numérateur $-a - \sqrt{\Delta}$ est une somme de termes négatifs. Conclusion : nous avons montré dans cette première étape que lorsque $\Delta > 0$, les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $a > 0$ et $b \geq 0$.

2ème étape : le cas $\Delta > 0$

L'équation caractéristique admet dans ce cas une racine double $x = \frac{-a}{2}$ et les solutions $t \mapsto y(t)$ de l'équation différentielle linéaire homogène (d'ordre 2) $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = (\lambda t + \mu)e^{xt},$$

avec λ, μ des constantes réelles. Par croissance comparée, les fonctions y s'écrivant comme ci-dessus sont bornées sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $x = \frac{-a}{2} < 0$, c'est-à-dire si et seulement si $a > 0$. Attention, elles ne le sont pas quand $x = 0$, à cause du terme polynôme $\lambda t + \mu$. Remarquons que b est ici forcément positif quand $a > 0$, car nous avons $\Delta = 0$, donc $b^2 = 4a$.

3ème étape : le cas $\Delta < 0$

Les racines de l'équation caractéristique sont maintenant

$$x_1 = \frac{-a + i\sqrt{-\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-a - i\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

D'après le cours, toutes les solutions $t \mapsto y(t)$ de l'équation différentielle linéaire homogène (d'ordre 2) $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = e^{-\frac{a}{2}t} \cdot \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right) \right),$$

avec λ, μ des constantes réelles. Les fonctions y s'écrivant comme ci-dessus sont bornées sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\frac{-a}{2} \leq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $a \geq 0$. Observons qu'ici b est forcément positif car $0 \leq a^2 < 4b$.

Conclusion L'ensemble des couples (a, b) tels que les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène (d'ordre 2) $y'' + ay' + by = 0$ sont toutes bornées sur $\mathbb{R}_+$ est comme attendu

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a, b \geq 0\} \setminus \{(0, 0)\}.$$

Exercice 13.—

1. La fonction cherchée y étant de classe C^1 et à valeurs strictement positives sur un intervalle I (à définir), la fonction Z , définie par $Z(t) = \sqrt{y(t)}$ pour tout $t \in I$ est aussi de classe C^1 à valeurs strictement positives de dérivée:

$$Z'(t) = \frac{y'(t)}{2\sqrt{y(t)}} = \frac{y'(t)}{2Z(t)}.$$

Or y satisfait l'équation (*) donc Z vérifie:

$$2(1+t^2)Z(t)Z'(t) - 2Z^2(t) = -2Z(t)$$

pour tout $t \in I$. De plus Z ne s'annulant jamais sur I cette équation est équivalente à

$$(1+t^2)Z'(t) - Z(t) = -1.$$

De plus $1+t^2$ ne s'annulant jamais pour tout t réel, l'équation est alors équivalente à:

$$Z'(t) - \frac{1}{1+t^2}Z(t) = -\frac{1}{1+t^2} \quad (**).$$

Nous obtenons ainsi l'expression des fonctions a et b , i.e.

$$a(t) = b(t) = -\frac{1}{1+t^2}.$$

2. On remarque qu'une solution particulière de l'équation (**) est $Z_0(t) = 1$ pour tout t réel. Cherchons maintenant la forme générale des solutions de l'équation homogène:

$$Z'(t) - \frac{1}{1+t^2}Z(t) = 0.$$

Nous savons qu'une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est la fonction $t \mapsto \arctan(t)$ ainsi les solutions Z_1 de l'équation homogène s'écrivent:

$$Z_1(t) = \lambda e^{\arctan t}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$. Ainsi toutes les solutions Z de l'équation (**) s'écrivent:

$$Z(t) = 1 + \lambda e^{\arctan t}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$. Ces fonctions, selon les valeurs de λ , ne sont pas toujours à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$ on ne peut donc pas en conclure tout de suite les solutions y de (*) ainsi que l'intervalle I .

Parmi ces solutions, il y en a une seule notée ϕ qui vérifie le problème de Cauchy $\phi(0) = \sqrt{\alpha}$.

En effet cette condition entraîne que $1 + \lambda = \sqrt{\alpha}$, soit $\lambda = \sqrt{\alpha} - 1$. Ainsi la fonction $\phi : t \mapsto 1 + (\sqrt{\alpha} - 1)e^{\arctan t}$ est l'unique solution de l'équation (**) vérifiant le problème de Cauchy, $\phi(0) = \sqrt{\alpha}$.

3. Utilisant l'équation (**) ou calculant directement la dérivée de ϕ on trouve:

$$\phi'(t) = \frac{\sqrt{\alpha} - 1}{1+t^2} e^{\arctan t}.$$

Ainsi $\phi'(t)$ est du signe de $\sqrt{\alpha} - 1$. Si $\alpha = 1$ la solution ϕ est constante et $\phi(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si $\alpha > 1$ la solution ϕ est strictement croissante et à valeurs strictement positives pour

tout $t \in \mathbb{R}$. Etudions le cas où $\alpha < 1$, la fonction ϕ étant alors décroissante. La fonction arctan étant à valeurs dans l'intervalle ouvert $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on déduit l'encadrement de $\phi(t)$:

$$1 + (\sqrt{\alpha} - 1)e^{\frac{\pi}{2}} < \phi(t) < 1 + (\sqrt{\alpha} - 1)e^{-\frac{\pi}{2}}$$

la quantité $\sqrt{\alpha} - 1$ étant négative. Ainsi, si α est telle que

$$1 + (\sqrt{\alpha} - 1)e^{\frac{\pi}{2}} < 0$$

alors, la fonction ϕ étant décroissante et continue, il existe un réel t_0 tel que $\phi(t_0) = 0$ et $\phi(t) \leq 0$ pour tout $t \geq t_0$. Il existe donc bien une valeur $\alpha_0 \in]0, 1[$ telle que si $\alpha < \alpha_0$ alors la fonction ϕ peut s'annuler pour $t > 0$.

4. Ainsi, posons

$$\alpha_0 = (1 - e^{-\frac{\pi}{2}})^2.$$

Si $\alpha \geq \alpha_0$ la solution de l'équation (*) est $y(t) = (\phi(t))^2$, C^1 sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Si $\alpha < \alpha_0$ alors il existe $t_0 > 0$ tel que $\phi(t_0) = 0$ aussi la solution de l'équation (*) est la fonction $y(t) = (\phi(t))^2$, C^1 sur l'intervalle ouvert $] -\infty, t_0[$, t_0 étant le nombre réel positif telle que $\phi(t_0) = 0$.

Exercice 14.— Pour résoudre l'équation proposée, il est indiqué de faire le changement de fonction inconnue $z(t) = (1 + e^t)y(t)$. On a $z'(t) = e^t y(t) + (1 + e^t)y'(t)$ et $z''(t) = e^t y(t) + e^t y'(t) + e^t y'(t) + (1 + e^t)y''(t) = e^t y(t) + 2e^t y'(t) + (1 + e^t)y''(t)$. On a donc $(1 + e^t)y''(t) + 2e^t y'(t) + (2e^t + 1)y(t) = z''(t) - e^t y(t) + (2e^t + 1)y(t) = z''(t) + (e^t + 1)y(t) = z''(t) + z(t)$. On en déduit que la fonction y est solution de l'équation (E) : $(1 + e^t)y'' + 2e^t y' + (2e^t + 1)y = te^t$ si et seulement si la fonction $z = (1 + e^t)y$ est solution de l'équation (E') : $z'' + z = te^t$

On résout donc l'équation (E'). La solution générale de l'équation homogène associée $z'' + z = 0$ s'écrit $z(t) = A \cos(t) + B \sin(t)$ où A et B sont des constantes réelles.

On cherche une solution particulière de (E') sous la forme $z(t) = (at + b)e^t$. On a $z'(t) = ae^t + (at + b)e^t = (at + a + b)e^t$ et $z''(t) = ae^t + (at + a + b)e^t = (at + 2a + b)e^t$. On en déduit que $te^t = z''(t) + z(t) = (at + 2a + b)e^t + (at + b)e^t = (2at + 2a + 2b)e^t$. On identifie et on a donc $2a = 1$ et $2a + 2b = 0$, c'est-à-dire $a = 1/2$ et $b = -1/2$. Une solution particulière de (E') est donc $z(t) = \frac{1}{2}(t - 1)e^t$.

La solution générale de l'équation (E') s'écrit donc :

$$z(t) = A \cos(t) + B \sin(t) + \frac{1}{2}(t - 1)e^t.$$

Il en résulte que la solution générale de l'équation (E) s'écrit :

$$y(t) = \frac{1}{e^t + 1} \left(A \cos(t) + B \sin(t) + \frac{1}{2}(t - 1)e^t \right).$$