TD du 4/03/21 - Analyse

Programme du jour : Ex 7 (I_4, I_6), Ex 8, Ex 9 (A, D)

Interrogation en TD jeudi 11 mars ($\simeq$ 30 min) ⚠
sur la feuille n°2 (les exercices traités en TD jusqu'à aujourd'hui)

<u>Rappel</u> (CDV) : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue
et $\varphi : [a,b] \to I$ $\mathcal{C}^1$ (le CDV)

Alors :
$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt.$$

$\boxed{\text{Ex } 7}$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\cos^3(x) + \sin^3(x)\right) dx = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3(x)\, dx}_{(*)} + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3(x)\, dx}_{(**)} .$$

<u>1ère étape</u> : calcul de $(*)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2(x)\cos(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(1 - \sin^2(x)\right)\cos(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(1 - \underbrace{\sin}_{\varphi(x)}{}^2(x)\right) \underbrace{\sin'(x)}_{\varphi'(x)}\, dx$$

On $t = \varphi(x) = \sin(x)$ $\Big\{$ CDV qui est bien sûr $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

$f(t) = 1 - t^2$ qui est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow (*) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx \underset{(CDV)}{=} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{6})} f(t)\, dt = \int_0^{1/2} (1 - t^2)\, dt$$

$$= \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^{1/2}$$

$$= 1/2 - \frac{(1/2)^3}{3}$$

$$= 1/2 - \frac{1}{24} = \frac{11}{24} .$$

2ème étape : calcul de (**) On procède de la même façon.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos^2(x))\sin(x)\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos^2(x))\cos'(x)\,dx$$

CDV $\left[\begin{array}{l} \text{On pose } t = \varphi(x) = \cos(x) \text{ qui est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, \frac{\pi}{6}] \\ f(t) = 1 - t^2 \text{ qui est continue sur } \mathbb{R} \end{array}\right.$

$$(**) \underset{(CDV)}{=} -\int_{\varphi(0)}^{\varphi(\frac{\pi}{6})} (1-t^2)\,dt = -\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (1-t^2)\,dt = -\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{(\sqrt{3})^3}{24}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3^{3/2}}{24}.$$

Finalement, on obtient que $I_4 = (*) + (**) = \frac{11}{24} + \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3^{3/2}}{24} = \frac{9-3\sqrt{3}}{8}$.

$$I_6 = \int_0^{1/2} \frac{e^{\arctan(2x)}}{1+4x^2}\,dx$$

On pose le CDV $\begin{cases} t = \arctan(2x) = \varphi(x) \text{ qui est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ donc sur } [0, 1/2]. \\ \varphi'(x) = \arctan'(2x) \times (2x)' = \dfrac{1}{1+(2x)^2} \times 2 = \dfrac{2}{1+4x^2} \\ f(t) = e^t \text{ qui est continue sur } \mathbb{R} \end{cases}$

$$I_6 = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx \underset{(CDV)}{=} \frac{1}{2}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(1/2)} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^t\,dt = \frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi}{4}} - 1}{2}.$$

Autres intégrales qui se calculent "comme I_6"

$I_5 \rightarrow$ on pose $t = x^3$ (CDV) $\frac{1}{3}\int_{-1}^{8} \frac{dt}{4+t} = \frac{1}{3}\left[\ln(4+t)\right]_{-1}^{8} = \dots$

$I_7 \rightarrow$ ..... $t = x^2$ (CDV)

I_9

Ex 8, Ex 9 (A, D)

Programme interro : Feuille 2

Ex 1 (f_2, f_1, f_5, f_6), Ex 2 (b, c, d, e), Ex 3 (I_1, I_2, I_3)

Ex 4 (f, g) + ce qu'on a fait aujourd'hui.

$\boxed{\text{Ex } 8}$

1) $\phi(x) = x^2 \sin(x)$ qui est continue sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \phi$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

On cherche par exemple l'unique primitive F de ϕ telle que $F(0) = 0$.

On sait que $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_0^x \phi(t)\,dt$

On procède par IPP pour calculer $F(x) = \int_0^x \underbrace{t^2}_{u(t)} \underbrace{\sin(t)}_{v'(t)} dt$.

$$\left[\begin{array}{ll} u(t) = t^2 & u'(t) = 2t \\ v(t) = -\cos(t) & v'(t) = \sin(t) \end{array}\right.$$

u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, x]$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$F(x) = \int_0^x u(t)v'(t)dt \underset{(IPP)}{=} \left[u(t)v(t)\right]_0^x - \int_0^x u'(t)v(t)dt$$

$$= \left[-t^2\cos(t)\right]_0^x + 2\int_0^x t\cos(t)dt$$

Par une 2ème IPP, $\int_0^x \underbrace{t}_{u(t)} \underbrace{\cos(t)}_{v'(t)} dt = \left[u(t)v(t)\right]_0^x - \int_0^x u'(t)v(t)dt$

$$\left[\begin{array}{ll} u(t) = t & u'(t) = 1 \\ v(t) = \sin(t) & v'(t) = \cos(t) \\ \text{(on a bien } u \text{ et } v \ \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}) & \end{array}\right.$$

$$= \left[t\sin(t)\right]_0^x - \int_0^x \sin(t)dt$$

$$= \left[t\sin(t)\right]_0^x - \left[-\cos(t)\right]_0^x.$$

Finalement, $F(x) = \left[-t^2\cos(t)\right]_0^x + 2\left[t\sin(t)\right]_0^x - 2\left[-\cos(t)\right]_0^x$

$$= -x^2\cos(x) + 0 + 2x\sin(x) - 2\times 0 - 2\Big(-\cos(x) + \underbrace{\cos(0)}_{=1}\Big)$$

$$= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) - 2.$$

$\Rightarrow$ Les primitives de ϕ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$x \mapsto -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + C \quad \text{où } C\in\mathbb{R}.$$

<u>Q2</u> : $I = \int_0^1 \sin(\pi x^{1/3})\,dx$

On pose $u = \pi x^{1/3} \Rightarrow \underbrace{x = \left(\frac{u}{\pi}\right)^3}_{\text{CDV } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}} \Rightarrow dx = \left(\left(\frac{u}{\pi}\right)^3\right)' du$

$$= \frac{1}{\pi^3} 3u^2\,du$$

$$= \frac{3u^2\,du}{\pi^3}.$$

$x = 0 \longrightarrow u = 0$

$x = 1 \longrightarrow u = \pi$

$$I = \int_0^1 \sin(\pi x^{1/3})\,dx = \int_0^\pi \sin(u)\frac{3u^2}{\pi^3}\,du = \frac{3}{\pi^3}\int_0^\pi u^2\sin(u)\,du = \frac{3}{\pi^2}F(\pi).$$

On : $F(\pi) = -\pi^2\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + 2\pi\underbrace{\sin(\pi)}_{=0} + 2\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} - 2 = \pi^2 - 4$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{3}{\pi^3}(\pi^2 - 4)}$$

$\boxed{\text{Ex 9}}$

$$A = \int_0^1 x\sqrt{3x+1}\,dx$$

On pose $z = 3x+1$ qui est un CDV $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$

$$dz = 3\,dx$$

$$A = \int_1^4 \left(\frac{z-1}{3}\right)\sqrt{z}\,\frac{1}{3}dz = \frac{1}{9}\int_1^4 (z-1)\sqrt{z}\,dz$$

$$= \frac{1}{9} \times \left(\int_1^4 z\sqrt{z}\,dz - \int_1^4 \sqrt{z}\,dz \right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(\int_1^4 z^{3/2}\,dz - \int_1^4 z^{1/2}\,dz \right)$$

Rappel : $z \mapsto \frac{1}{\alpha+1} z^{\alpha+1}$ est une primitive de $z \mapsto z^{\alpha}$ sur $\mathbb{R}_+$.

$$= \frac{1}{9} \times \left(\left[\frac{2}{5} z^{5/2}\right]_1^4 - \left[\frac{2}{3} z^{3/2}\right]_1^4 \right)$$

$$= \dots = \frac{116}{135}.$$

à détailler

$$D = \int_{1/2}^{1} \frac{1}{x(x+1)} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$$

On pose $v = \dfrac{x}{x+1}$

$\Rightarrow$ CDV qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

donc $\mathcal{C}^1$ sur $[1/2, 1]$.

On a $dv = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)' dx = \dfrac{(\cancel{x}+1) - \cancel{x}}{(x+1)^2} dx = \dfrac{1}{(1+x)^2} dx$

$$D = \int_{1/2}^{1} \underbrace{\frac{(x+1)^{\cancel{2}}}{x(\cancel{x+1})}}_{1/v} \ln\underbrace{\left(\frac{x}{x+1}\right)}_{v} \underbrace{\frac{1}{(1+x)^2} dx}_{dv} \underset{(CDV)}{=} \int_{1/3}^{1/2} \frac{1}{v} \ln(v) dv$$

$$\underset{\substack{t = \ln(v) \\ \text{CDV qui est } \mathcal{C}^1 \\ \text{sur } [1/3, 1/2] \\ dt = \frac{1}{v} dv}}{=} \int_{\ln(1/3)}^{\ln(1/2)} t \, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{\ln(1/3)}^{\ln(1/2)}$$

$$= \frac{\ln^2(1/2) - \ln^2(1/3)}{2}$$

$$= \frac{\ln^2(2) - \ln^2(3)}{2}$$

car $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$

$\ln(1/3) = -\ln(3)$

$v = \varphi(x) = \dfrac{x}{x+1}$

$dv = \varphi'(x) dx$

"$v'(x) = \dfrac{dv}{dx} = \varphi'(x) = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)' = \dfrac{1}{(x+1)^2}$"

$\Rightarrow$ "$dv = \dfrac{1}{(x+1)^2} dx$"