# MDD 151 Groupe MPSI-B4

Jean-Baptiste APOUNG KAMGA

Complément de la séance de TD du 11/03/2021

**Note :** Vous trouverez ici :

A - La correction du test du 11/03/2021

B - Le dernier exercice que la nécessité du test ne nous a pas permis de traiter : Exercice 14
(J'en profite pour traiter 2 cas de changement de variables (circulaires) de exercice 9)

C - La réponse à une question en fin de séance sur un exercice de la fiche 1 en relation avec l'exercice 14 ci-dessus.
(cela concerne les exercices 18 et 15 de la fiche 1. Je remets donc une solution de certaines questions de ces exercices. Vous pouvez vous référer au corrigé de la fiche 1 qui vous a été transmis sur e-campus)

# A.) Test du 11/03/2021

Soit $G(x) = \int_{-3}^{x} |t| \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\, dt$

a.) Donnez l'expression de $G(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
On effectuera le changement de variable $u = \ln(1+t^2)$.

b.) Déduire $G(3)$.

## Solution

a.) Expression de $G(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

RQ La fonction à intégrer $f(t) = |t| \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}$ changeant d'expression suivant des intervalles, on dit que $f$ est définie par morceaux. Dès lors, si les bornes d'intégration permettent d'identifier la bonne expression de $f$ à considérer alors on effectue le calcul avec cette expression. Sinon on utilise l'approche systématique ci-dessous :

* Expression de $f$ sans valeurs absolues (par morceaux)

$$f(x) = |t| \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} = \begin{cases} -t \dfrac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} & \text{si } t \leq 0 \\ t \dfrac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

* On vérifie si les bornes d'intégration $-3, x$ sont dans le même intervalle où $f$ a une expression fixe

- si oui, on utilise cette expression pour le calcul
- si non, on utilise la relation de Chasles pour intégrer de $-3$ à $x$ respectant les expressions de $f$.

Page 30 du poly.

Par conséquent dans le calcul de $G(x)=\int_{-3}^{x} f(t)\,dt$

On va distinguer les cas $x \leq 0$ et $x \geq 0$.

. Si $x \leq 0$, on a $G(x) = \int_{-3}^{x} -\frac{t}{1+t^2} \ln(1+t^2)\,dt$ (*)

. Si $x > 0$, $G(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\,dt \underset{\text{Relation de Chasles}}{=} \underbrace{\int_{-3}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt}$

Car f change d'expression dans $[-3,0]$ puis dans $[0,x]$

Ainsi,

$$G(x) = \begin{cases} \int_{-3}^{x} -\frac{t}{1+t^2} \ln(1+t^2)\,dt & \text{si } x \leq 0 \\ \int_{-3}^{0} \frac{-t}{1+t^2} \ln(1+t^2)\,dt + \int_{0}^{x} \frac{t}{1+t^2} \ln(1+t^2)\,dt & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Or pour $x \leq 0$,

$$\int_{-3}^{x} -\frac{t}{1+t^2} \ln(1+t^2)\,dt \underset{\substack{u=\ln(1+t^2) \\ du=\frac{2t}{1+t^2}dt}}{=} -\int_{\ln(10)}^{\ln(1+x^2)} \frac{u}{2}\,du$$

(voir TD)

$$= \left[-\frac{u^2}{4}\right]_{\ln(10)}^{\ln(1+x^2)}$$

$$= \frac{(\ln(10))^2 - (\ln(1+x^2))^2}{4}$$

(*)

Et si $x > 0$,

$$G(x) = \int_{-3}^{0} \frac{-t}{1+t^2} \ln(1+t^2)\,dt + \int_0^x \frac{t}{1+t^2} \ln(1+t^2)\,dt.$$

et d'après ce qui précède, (voir *)

$$\int_{-3}^{0} \frac{-t}{1+t^2} \ln(1+t^2)\,dt = \frac{(\ln(10))^2}{4} \quad (**)$$

De même pour $x > 0$ :

$$\int_0^x \frac{t}{1+t^2} \ln(1+t^2)\,dt \underset{\substack{u=\ln(1+t^2) \\ du = \frac{2t}{1+t^2}dt}}{=} \int_0^{\ln(1+x^2)} \frac{u}{2}\,du = \left[\frac{u^2}{4}\right]_0^{\ln(1+x^2)} = \frac{(\ln(1+x^2))^2}{4} \quad (***)$$

$$(**) \wedge (***) \Rightarrow G(x) = \frac{(\ln(10))^2 + (\ln(1+x^2))^2}{4} \text{ si } x \geq 0.$$

Finalement

$$\boxed{G(x) = \int_0^x |t| \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,dt = \begin{cases} \dfrac{(\ln(10))^2 - (\ln(1+x^2))^2}{4} & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{(\ln(10))^2 + (\ln(1+x^2))^2}{4} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

b) Deduction de $G(3)$

On déduit $G(3) = \dfrac{(\ln(10))^2 + (\ln(10))^2}{4} = \dfrac{(\ln(10))^2}{2}$.

RQ : $t \mapsto |t| \dfrac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}$ est paire. D'où

$$G(3) = \int_{-3}^{3} |t| \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,dt = 2\int_0^3 |t| \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,dt$$

$$= 2\int_0^3 t \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2}\,dt = 2 \cdot \frac{(\ln(10))^2}{4} \quad \text{(voir TD)}$$

## B) $\boxed{\text{Certains exercices de la fiche 2 non traités}}$

### Exercice 9 changement de variable par fonctions circulaires

$H = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ , changement de variable $x = \sin t$.

On pose $x = \sin t$ ie $t = \arcsin x$ ← permet de déterminer les bornes

Or $x \mapsto \arcsin x$ est bijective de $[-1,1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

et envoie $[0,1]$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

or $\sqrt{1-x^2}\,dx = \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = |\cos t| \cos t\,dt$

D'où

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt \quad \text{car } \cos t > 0 \text{ sur } [0, \tfrac{\pi}{2}].$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$M = \int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Effectuons un changement de variable $x = \sin t$.

On a $dx = \cos t\,dt$,

d'où

$$M = \int_{\arcsin 0}^{\arcsin \frac{1}{2}} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t}{|\cos t|} \cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 t\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\pi}{12}.$$

# Exercice 14 (Fiche 2)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt$

## 1-) Bonne définition de f.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x \in [0,1]$,
comme $\arcsin\sqrt{t}$ est continue sur $[0,1]$,
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,dt$ est bien définie.
En procédant à l'identique, on mq $\int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,dt$ est bien définie.
Donc, f est bien définie.

## f est de classe $C^1$

En effet,
. $\arcsin\sqrt{t}$ est continue sur $[0,1]$
désignons par $F_1$ une primitive
. $\arccos\sqrt{t}$ est continue sur $[0,1]$
désignons par $F_2$ une primitive
On a : $\forall x \in \mathbb{R}$.

$f(x) = F_1(\sin^2 x) - F_1(0) + F_2(\cos^2 x) - F_2(0)$

Donc f est de classe $C^1$ comme somme et composées de fonctions de classe $C^1$

## 2-) Calcul de $f'(x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$,
Commençons par remarquer que f est périodique de période $2\pi$

Le domaine d'étude est $[-\pi, \pi]$
Soit $x \in ]-\pi, \pi[$

$f'(x) = 2\cos x \sin x \arcsin\sqrt{\sin^2 x} - 2\sin x \cos x \arccos\sqrt{\cos^2 x}$

$= 2\cos x \sin x(\arcsin|\sin x| - \arccos|\cos x|)$

**si $x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$**

$f'(x) = 2\cos x \sin x(\arcsin(\sin(\pi+x)) - \arccos(\cos(\pi+x)))$

$= 2\cos x \sin x(\pi + x - \pi - x)$
$= 0$

**si $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$,**

$\arcsin(|\sin x|) = \arcsin(\sin -x) = -x$
$\arccos(|\cos x|) = \arccos(\cos(-x)) = -x$
D'où $f'(x) = 0$

**si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$**

$\arcsin(|\sin x|) = \arcsin(\sin x) = x$
$\arccos(|\cos x|) = \arccos(\cos x) = x$
D'où $f'(x) = 0$

Si $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$,

$$\arcsin(|\sin x|) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$$

$$\arccos(|\cos x|) = \arccos(\cos(\pi - x)) = \pi - x$$

D'où $f'(x) = 0$.

Donc $f'(x) = 0 \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$

Comme $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ il vient que $\boxed{f'(x) = 0 \ \forall_{\mathbb{R}}^{x}}$

Expression de $f$

Puisque $f'(x) = 0 \ \forall_{\mathbb{R}}^{x}$, il vient $\exists c \in \mathbb{R}$ tq: $f(x) = c \ \forall_{\mathbb{R}}^{x}$

Or $f(0) = 0 + \int_0^1 \arccos\sqrt{t}\, dt$

$$\underset{x=\sqrt{t}}{=} 2\int_0^1 x \arccos x \, dx$$

$$= \underbrace{\left[x^2 \arccos x\right]_0^1}_{=0} + \int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Calculons $I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

par changement de variable $x = \sin t$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t \cos t\, dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t \cos t}{|\cos t|}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt$$

Or $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t$

Donc $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$

D'où

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt$$

$$= \left[\frac{1}{2} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

Donc $f(0) = \frac{\pi}{4}$

et finalement $c = \frac{\pi}{4}$

On peut donc écrire

$$\boxed{\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\, dt = \frac{\pi}{4}}$$

# C/ Réponse aux questions.

Question posée :

"Je ne comprends pas l'expression de $g(x) = \arccos(\cos x)$ sur l'intervalle $[0, 4\pi]$".

Cette question m'amène à reprendre certains exercices de la fiche TD 1.

(que nous n'aurons pas traités mais dont les corrigés sont sur e-campus)

Il s'agit de l'exercice 15. Nous en profitons pour revenir sur l'exercice 18.

Exercice 18 (Fiche 1)

$f(x) = \arccos(\cos(x))$.

a) Montrons que f est $2\pi$-périodique.

En effet, soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ existe. Donc $\mathcal{D}f = \mathbb{R}+$.

Soit donc $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+2\pi) = \arccos(\cos(x+2\pi))$$
$$= \arccos(\cos x) = f(x)$$

Par conséquent le domaine d'étude de f est $\mathcal{D}_E f = [-\pi, \pi]$.

b) Simplifions f sur $[-\pi, \pi]$

Analysons la parité de f.

Soit $x \in [-\pi, 0]$,

$$f(-x) = \arccos(\cos(-x))$$
$$= \arccos(\cos x) \quad \text{car cos pair}$$
$$= f(x)$$

Donc f est paire.

D'où $\mathcal{D}_E f = [0, \pi]$ et l'expression de f sur $[-\pi, 0]$ se déduira par parité (ou symétrie).

Comme $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ est bijective de réciproque cos

On a :

$$\arccos(\cos x) = x \quad \forall x \in [0, \pi]$$

Comme pour $x \in [-\pi, 0]$ on a $-x \in [0, \pi]$ il vient

$$\arccos(\cos(x)) = \arccos(\cos(-x)) = -x \quad \forall x \in [-\pi, 0]$$

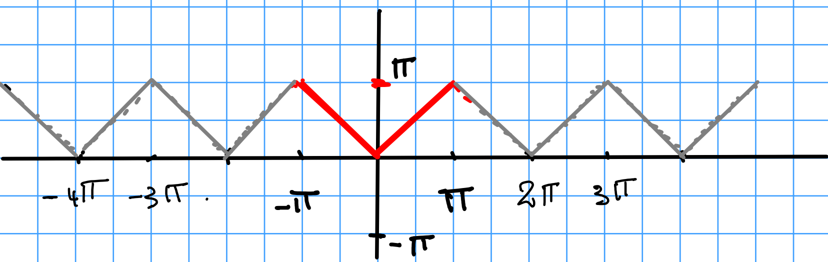
D'où finalement :

$$\arccos(\cos(x)) = \begin{cases} -x & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Ce qui donne l'expression de f sur un intervalle de longueur $2\pi$ ce qui est suffisant pour exprimer f sur tout $\mathbb{R}$ :

## c°) Graphe de f sur IR.

On représente le graphe de f sur $[-\pi, \pi]$ et on déduit le graphe de f sur IR par translation de $2\pi$




## 2°) $g(x) = \arcsin(\sin(x))$

### a) g est $2\pi$ périodique.

En effet, $\mathcal{D}g = \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$g(x+2\pi) = \arcsin(\sin(x+2\pi))$$
$$= \arcsin(\sin(x))$$
$$= g(x).$$

car sin est $2\pi$-périodique

### b) Simplification de g sur $[0, 2\pi]$.

On va simplifier g sur un intervalle de longueur $2\pi$ puis exprimer g sur $[0, 2\pi]$ par périodicité (translation).

Or :

$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est bijective de réciproque sin

D'où :

$\arcsin(\sin x) = x$ si $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

d'où

$$g(x) = x \quad \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

On n'a pas encore l'expression de g sur un intervalle de longueur $2\pi$.

Comme $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

on a :

$$g(\pi - x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = g(x)$$

Par conséquent : si $-\frac{\pi}{2} \leq \pi - x \leq \frac{\pi}{2}$

$$g(x) = g(\pi - x) = \pi - x.$$

Donc

$$g(x) = \pi - x \quad \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \pi - x \leq \frac{\pi}{2}$$

Comme $-\frac{\pi}{2} \leq \pi - x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

Il vient que

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

On a donc l'expression de g sur un intervalle de longueur $2\pi$.

On peut donc obtenir l'expression ailleurs sur IR par simples translations de $2\pi$

Précisons cela:

$$g(x)=\begin{cases} x & \text{si } -\frac{\pi}{2}\le x\le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{si } \frac{\pi}{2}\le x\le \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{cases} x-2\pi & \text{si } -\frac{\pi}{2}\le x-2\pi\le \frac{\pi}{2} \\ \pi-(x-2\pi) & \text{si } \frac{\pi}{2}\le x-2\pi\le \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

obtenu en remplaçant dans (*) $x$ par $x-\underbrace{2\pi}$

ceci est la période

D'où

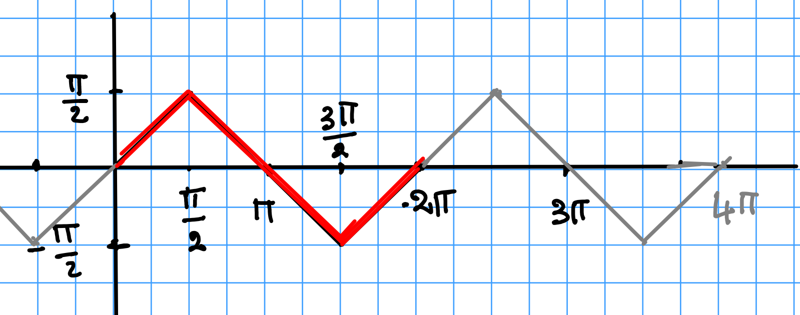
$$g(x)=\begin{cases} x & \text{si } -\frac{\pi}{2}\le x\le \frac{\pi}{2} \\ \pi-x & \text{si } \frac{\pi}{2}\le x\le \frac{3\pi}{2} \\ x-2\pi & \text{si } \frac{3\pi}{2}\le x\le \frac{5\pi}{2} \\ 3\pi-x & \text{si } \frac{5\pi}{2}\le x\le \frac{7\pi}{2} \end{cases}$$

On vérifie qu'on a recouvert l'intervalle $[0, 2\pi]$. → sinon on rajout une ligne en remplaçant dans (*) $x$ par $\underbrace{x-4\pi}_{\underbrace{x-2\pi}_{\text{étape précédente}} - \underbrace{2\pi}_{\text{période}}}$

D'où l'expression de $g$ sur cet intervalle.

$$g(x)=\begin{cases} x & \text{si } 0\le x\le \frac{\pi}{2} \\ \pi-x & \text{si } \frac{\pi}{2}\le x\le \frac{3\pi}{2} \\ x-2\pi & \text{si } \frac{3\pi}{2}\le x\le 2\pi \end{cases}$$

## c) graphe de g.




Mettons cela en pratique sur certaines questions de l'exercice 15 de la fiche 1

# Exercice 15 (Fiche 1)

## Simplification et dessin de graphe.

- $f_1(x) = \arccos(\cos x)$ sur $[0, 4\pi]$

$f_1$ est périodique de période $2\pi$.
Il nous faut simplement connaître l'expression de $f_1$ sur un intervalle de longueur $2\pi$, pour être à même de fournir l'expression de $f$ partout.

Or d'après l'exercice 18, on a l'expression de $f_1$ sur $[-\pi, \pi]$

$$f_1(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

On utilise alors les translations de $2\pi$ pour recouvrir $[0, 4\pi]$.

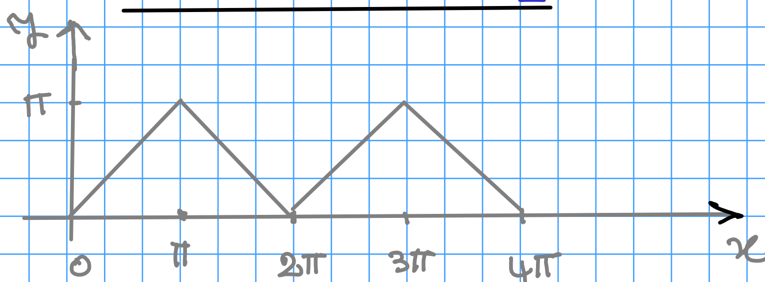
$$f_1(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ -(x-2\pi) & \text{si } -\pi \leq x-2\pi \leq 0 \\ x-2\pi & \text{si } 0 \leq x-2\pi \leq \pi \\ -(x-4\pi) & \text{si } -\pi \leq x-4\pi \leq 0 \end{cases}$$

Comme $x - 4\pi \leq 0 \Rightarrow x \leq 4\pi$

On a recouvert $[0, 4\pi]$.
On peut donc s'arrêter là.
Et on a

$$\boxed{f_1(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ 2\pi - x & \text{si } \pi \leq x \leq 2\pi \\ x - 2\pi & \text{si } 2\pi \leq x \leq 3\pi \\ 4\pi - x & \text{si } 3\pi \leq x \leq 4\pi \end{cases}}$$

. Courbe de $f_1$.




$f_2(x) = \arccos(\sin x)$ sur $[0, 4\pi]$

$f_2$ est $2\pi$ périodique.
On va simplifier $f_2$ sur un intervalle de longueur $2\pi$

On sait que

$$\arccos(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Comme $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, on a

$$\arccos(\sin x) = \arccos(\cos(\tfrac{\pi}{2} - x))$$

On peut remarquer que

$$f_2(x) = f_1(\tfrac{\pi}{2} - x).$$

Mais supposons qu'on ne l'ait pas remarqué.

Alors de

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} -x & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

et $\arccos(\sin x) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$

on aurait eu :

$$\arccos(\sin x) = \begin{cases} -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) & \text{si } -\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq 0 \\ \frac{\pi}{2} - x & \text{si } 0 \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \pi \end{cases}$$

D'où

$$f_2(x) = \begin{cases} x - \frac{\pi}{2} & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} - x & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

C'est-à-dire l'expression sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{2} & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

On complète alors par périodicité (ou translation) $2\pi$

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{2} & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} - (x - 2\pi) & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq x - 2\pi \leq \frac{\pi}{2} \\ x - 2\pi - \frac{\pi}{2} & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x - 2\pi \leq \frac{3\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} - (x - 4\pi) & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq x - 4\pi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

D'où après arrangement l'expression de $f_2$ sur $[0, 4\pi]$ est :

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{2} & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\ \frac{5\pi}{2} - x & \text{si } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2} \\ x - \frac{5\pi}{2} & \text{si } \frac{5\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2} \\ 9\pi/2 - x & \text{si } 7\pi/2 \leq x \leq 4\pi \end{cases}$$

## Graphe de $f_2$.