

Module MDD151 : Calcul intégral

Examen, durée : 2 heures

Les exercices qui suivent sont indépendants, et ne sont *pas* classés par ordre de difficulté (à part le dernier, qui est plus théorique que les autres et qu'il est conseillé de n'aborder que si vous pensez avoir traité correctement tout le reste). Les réponses et les calculs devront être justifiés de façon précise.

Les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices. Tout appareil électronique doit être éteint, notamment les téléphones portables.

Exercice 1.— En utilisant (entre autres) une intégration par parties, déterminer la limite de la suite (u_n) définie, pour tout $n \geq 1$, par

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \arctan(k/n).$$

Exercice 2.— Soit a un réel tel que $a \geq 3$. Démontrer que pour tout $x \in]-1, 1[$ on a :

$$\left| (1+x)^a - 1 - ax - \frac{1}{2}a(a-1)x^2 \right| \leq \frac{1}{6}a(a-1)(a-2)2^{a-3}|x|^3.$$

Exercice 3.— Dans cet exercice on considère la fonction f définie sur $] -1, 1[$ par :

$$f(x) = \exp(1 - \sqrt{1+x}).$$

Déterminer l'équation de la tangente en 0 au graphe de f , et indiquer la position relative du graphe et de cette tangente.

Exercice 4.— Pour tout $x > 0$ on pose

$$g(x) = x^2 \left(\sin(1/x) + \cos(1/x) - 1 \right).$$

Déterminer l'asymptote au graphe de g en $+\infty$, et la position relative du graphe par rapport à cette asymptote.

Suite au verso.

Exercice 5.— Dans cet exercice on considère l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y' + (t^2 + 1)y = 2t^3 + t^2 + 2t + 3. \quad (1)$$

1. Déterminer une solution particulière sous la forme $y_0(t) = at + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation homogène associée.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1).

Exercice 6.— Le but de cet exercice est de déterminer une fonction y , de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, vérifiant

$$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

avec aussi $y(0) = -1$ et $y'(0) = -4$.

1. Rappeler brièvement le résultat du cours qui permet d'affirmer qu'une telle fonction existe et est unique.
2. Déterminer cette fonction y .

Exercice 7.— Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y' = t \exp(t^2 - y).$$

Exercice 8.— *Cet exercice est plus théorique que les précédents, il est conseillé de ne l'aborder qu'après avoir résolu les autres.* Soient u et v deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$; on considère l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y'' + u(t)y' + v(t)y = 0. \quad (2)$$

On se donne deux solutions y_1 et y_2 de cette équation. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose

$$w(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t).$$

1. Démontrer que la fonction w est solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 que l'on déterminera.
2. En utilisant la question précédente démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (i) Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $w(t) \neq 0$.
 - (ii) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $w(t) \neq 0$.
3. Dans cette question fixe un réel t_0 . On *admet* que $w(t_0)$ est non nul si, seulement si, la matrice $M(t_0) = \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix}$ est inversible. En introduisant le problème de Cauchy, démontrer que les propriétés (i) et (ii) de la question précédente sont aussi équivalentes à :
 - (iii) La famille (y_1, y_2) est une base de l'espace vectoriel des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (2).