

Module MDD151 : Calcul intégral

Corrigé de l'examen (durée : 2 heures)

Exercice 1.— En utilisant (entre autres) une intégration par parties, déterminer la limite de la suite (u_n) définie, pour tout $n \geq 1$, par

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \arctan(k/n).$$

Corrigé. La fonction $\arctan$ est continue sur $[0, 1]$ donc le théorème des sommes de Riemann montre que la suite (u_n) tend vers $\int_0^1 \arctan x \, dx$. On écrit $\arctan x = 1 \cdot \arctan x$; les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \arctan x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ donc on peut intégrer par parties, ce qui donne :

$$\int_0^1 \arctan x \, dx = \left[x \arctan x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

Donc la suite (u_n) tend vers $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$.

Exercice 2.— Soit a un réel tel que $a \geq 3$. Démontrer que pour tout $x \in]-1, 1[$ on a :

$$\left| (1+x)^a - 1 - ax - \frac{1}{2}a(a-1)x^2 \right| \leq \frac{1}{6}a(a-1)(a-2)2^{a-3}|x|^3.$$

Corrigé. Notons f la fonction définie sur $] -1, 1[$ par $f(x) = (1+x)^a$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$

et on a $f'(x) = a(1+x)^{a-1}$, $f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2}$ et $f'''(x) = a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3}$ pour tout $x \in] -1, 1[$. L'inégalité de Taylor-Lagrange (appliquée avec $n = 2$, $a = 0$ et $b = x$) montre que pour tout $x \in] -1, 1[$ on a :

$$\left| f(x) - f(0) - x'f'(0) - \frac{1}{2}x^2 f''(0) \right| \leq M \frac{|x|^3}{6}$$

où le réel M vérifie $|f'''(t)| = |a(a-1)(a-2)(1+t)^{a-3}| \leq M$ pour tout réel t compris entre 0 et x . Comme $a \geq 3$, on a $0 \leq (1+t)^{a-3} \leq 2^{a-3}$ pour tout $t \in] -1, 1[$ et on peut prendre $M = a(a-1)(a-2)2^{a-3}$. La formule ci-dessus donne alors la relation cherchée :

$$\left| (1+x)^a - 1 - ax - \frac{1}{2}a(a-1)x^2 \right| \leq \frac{1}{6}a(a-1)(a-2)2^{a-3}|x|^3.$$

Exercice 3.— Dans cet exercice on considère la fonction f définie sur $] -1, 1[$ par :

$$f(x) = \exp(1 - \sqrt{1+x}).$$

Déterminer l'équation de la tangente en 0 au graphe de f , et indiquer la position relative du graphe et de cette tangente.

Corrigé. On va calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2. On commence par constater que

$$1 - \sqrt{1+x} = 1 - \left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

quand x tend vers 0. Comme cette quantité tend vers 0, on peut l'insérer dans le développement limité $\exp(y) = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)$ (valable justement quand y tend vers 0), ce qui donne

$$\exp(1 - \sqrt{1+x}) = 1 + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right)^2 + o(x^2)$$

où le dernier terme $o(x^2)$ vient du fait que $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \sim -\frac{1}{2}x$ donne $o(y^2) = o(\frac{1}{4}x^2) = o(x^2)$. Après avoir éliminé les termes qui rentrent dans le $o(x^2)$ et rassemblé les autres, on obtient

$$f(x) = \exp(1 - \sqrt{1+x}) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$$

Comme $\frac{1}{4}x^2 \geq 0$ pour tout x , on en déduit que la tangente en 0 au graphe de f a pour équation $y = 1 - \frac{1}{2}x$ et que le graphe est au-dessus de cette tangente.

Exercice 4.— Pour tout $x > 0$ on pose

$$g(x) = x^2 \left(\sin(1/x) + \cos(1/x) - 1 \right).$$

Déterminer l'asymptote au graphe de g en $+\infty$, et la position relative du graphe par rapport à cette asymptote.

Corrigé. Posons $u = 1/x$. Quand x tend vers $+\infty$, u tend vers 0 donc on a :

$$\sin(u) + \cos(u) - 1 = \left(u - \frac{1}{6}u^3 + o(u^3)\right) + \left(1 - \frac{1}{2}u^2 + o(u^3)\right) - 1 = u - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{6}u^3 + o(u^3)$$

ce qui donne

$$g(x) = x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) = x - \frac{1}{2} - \frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Comme $-\frac{1}{6x} < 0$ pour tout $x > 0$, on en déduit que la droite d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote au graphe de g en $+\infty$, et que le graphe est en-dessous de cette asymptote.

Exercice 5.— Dans cet exercice on considère l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y' + (t^2 + 1)y = 2t^3 + t^2 + 2t + 3. \quad (1)$$

1. Déterminer une solution particulière sous la forme $y_0(t) = at + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation homogène associée.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1).

Corrigé.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Notons $y_0(t) = at + b$; on a alors $y'_0(t) = a$ et l'équation (1) équivaut à :

$$a + (t^2 + 1)(at + b) = 2t^3 + t^2 + 2t + 3.$$

On développe le membre de gauche et on identifie les coefficients de t^3 , t^2 , t et le coefficient constant. Cela fournit le système suivant :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ a = 2 \\ a + b = 3 \end{cases}$$

dont la solution est $(a, b) = (2, 1)$. La fonction $y_0(t) = 2t + 1$ est donc une solution particulière de l'équation (1).

2. L'équation homogène associée est $y' + (t^2 + 1)y = 0$. Elle est d'ordre 1. Comme une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto t^2 + 1$ est la fonction $t \mapsto \frac{1}{3}t^3 + t$, les solutions de cette équation homogène sont les fonctions de la forme

$$y(t) = \lambda \exp\left(-\frac{1}{3}t^3 - t\right)$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. On trouve l'ensemble des solutions de l'équation (1) en additionnant une solution particulière (ici celle trouvée à la question 1.) et la solution générale de l'équation homogène associée (déterminée à la question 1.). Ce sont donc les fonctions de la forme

$$y(t) = 2t + 1 + \lambda \exp\left(-\frac{1}{3}t^3 - t\right)$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.— Le but de cet exercice est de déterminer une fonction y , de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, vérifiant

$$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

avec aussi $y(0) = -1$ et $y'(0) = -4$.

1. Rappeler brièvement le résultat du cours qui permet d'affirmer qu'une telle fonction existe et est unique.

2. Déterminer cette fonction y .

Corrigé.

1. L'équation différentielle $y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 0$ est linéaire d'ordre 2 ; avec les conditions initiales $y(0) = -1$ et $y'(0) = -4$ elle forme un problème de Cauchy, pour lequel la solution existe et est unique sur $\mathbb{R}$.

2. L'équation caractéristique est $x^2 - 5x + 6$. Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 25 - 4 \cdot 6 = 1$ donc les racines sont $\frac{5 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, c'est-à-dire 2 et 3. Les solutions de l'équation différentielle $y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 0$ sont donc les fonctions de la forme

$$y(t) = A \exp(2t) + B \exp(3t)$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$. Pour une telle fonction on a $y'(t) = 2A \exp(2t) + 3B \exp(3t)$ donc $y(0) = A + B$ et $y'(0) = 2A + 3B$. Les conditions initiales $y(0) = -1$ et $y'(0) = -4$ sont satisfaites si, et seulement si, A et B sont solutions du système

$$\begin{cases} A + B &= -1 \\ 2A + 3B &= -4 \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, une méthode est de remplacer L_2 par $L_2 - 2L_1$, ce qui donne $B = -2$. En remplaçant dans L_1 on obtient alors $A = 1$. Finalement, la solution y cherchée est donnée par :

$$y(t) = \exp(2t) - 2 \exp(3t).$$

Exercice 7.— Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y' = t \exp(t^2 - y).$$

Corrigé. Cette équation différentielle s'écrit sous la forme

$$\exp(y(t))y'(t) = t \exp(t^2)$$

donc elle est à variables séparables. Soit y une solution sur $\mathbb{R}$. En intégrant la relation précédente on obtient l'existence d'un réel c tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on ait

$$\exp(y(t)) = \frac{1}{2} \exp(t^2) + c.$$

En prenant $t = 0$ on obtient $c = \exp(y(0)) - \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$, et en prenant le logarithme on a :

$$y(t) = \ln \left(\frac{1}{2} \exp(t^2) + c \right).$$

Réciproquement, soit c un réel tel que $c > -\frac{1}{2}$, et notons $y(t) = \ln \left(\frac{1}{2} \exp(t^2) + c \right)$. Alors on a bien $\frac{1}{2} \exp(t^2) + c \geq \frac{1}{2} + c > 0$ pour tout réel t , donc la fonction y est définie et

de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Elle vérifie $\exp(y(t)) = \frac{1}{2} \exp(t^2) + c$ pour tout t , et en dérivant cette relation on en déduit qu'elle vérifie $\exp(y(t))y'(t) = t \exp(t^2)$.

Finalement, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = t \exp(t^2 - y)$ sont exactement les fonctions de la forme $y(t) = \ln \left(\frac{1}{2} \exp(t^2) + c \right)$ avec $c > -\frac{1}{2}$.

Exercice 8.— *Cet exercice est plus théorique que les précédents, il est conseillé de ne l'aborder qu'après avoir résolu les autres.* Soient u et v deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$; on considère l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$y'' + u(t)y' + v(t)y = 0. \quad (2)$$

On se donne deux solutions y_1 et y_2 de cette équation. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose

$$w(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t).$$

1. Démontrer que la fonction w est solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 que l'on déterminera.
2. En utilisant la question précédente démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (i) Il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $w(t) \neq 0$.
 - (ii) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $w(t) \neq 0$.
3. Dans cette question fixe un réel t_0 . On *admet* que $w(t_0)$ est non nul si, seulement si, la matrice $M(t_0) = \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix}$ est inversible. En introduisant le problème de Cauchy, démontrer que les propriétés (i) et (ii) de la question précédente sont aussi équivalentes à :
 - (iii) La famille (y_1, y_2) est une base de l'espace vectoriel des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (2).

Corrigé.

1. On a $y_1''(t) = -u(t)y_1'(t) - v(t)y_1(t)$, et la relation analogue avec y_2 , d'où

$$\begin{aligned} w'(t) &= y_1'(t)y_2'(t) + y_1(t)y_2''(t) - y_1''(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) \\ &= y_1(t)y_2''(t) - y_1''(t)y_2(t) \\ &= y_1(t) \left(-u(t)y_2'(t) - v(t)y_2(t) \right) - \left(-u(t)y_1'(t) - v(t)y_1(t) \right) y_2(t) \\ &= -u(t)y_1(t)y_2'(t) + u(t)y_1'(t)y_2(t) \\ &= -u(t)w(t) \end{aligned}$$

donc la fonction w est solution de l'équation différentielle $w' + u(t)w = 0$ qui est linéaire homogène d'ordre 1.

2. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est triviale. Pour démontrer la réciproque, supposons que la fonction w s'annule en un réel t_0 . Alors elle est solution du problème de Cauchy formé par l'équation différentielle $w' + u(t)w = 0$ et la condition initiale $w(t_0) = 0$. Or ce problème a une solution unique, qui est la fonction nulle. Donc $w(t) = 0$ pour tout réel t .

3. L'application Φ définie par $\Phi(y) = (y(t_0), y'(t_0))$ est une application linéaire définie sur l'espace vectoriel E des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (2), à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. L'existence et l'unicité d'une solution au problème de Cauchy en t_0 montrent que Φ est bijective. Donc (y_1, y_2) est une base de E si, et seulement si, $(\Phi(y_1), \Phi(y_2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$; cela signifie que la matrice 2×2 dont les colonnes sont formées par $\Phi(y_1)$ et $\Phi(y_2)$ est inversible. Or cette matrice est exactement $M(t_0)$. D'après la propriété admise dans l'énoncé, on obtient donc que (y_1, y_2) est une base de E si, et seulement si, $w(t_0) \neq 0$. Donc l'assertion (iii) est équivalente aux assertions (i) et (ii) de la question 2.