

Module MDD151 : Calcul intégral

Entraînement pour l'examen

Ce qui suit ressemble à ce que vous pourriez avoir à l'examen, qui dure 2h (+ tiers-temps). Ce sujet est dans le même esprit que celui du partiel ; il y a juste une différence notable : la présence d'un exercice à la fin (l'exercice 8), qui est plus difficile que les autres et qu'il est conseillé de n'aborder que si vous êtes certain d'avoir fait tout le reste, et que tout le reste est juste.

À part l'exercice 8, les questions sont piochées dans les feuilles de TD : exercice 22 de la feuille 2, exercice 1 de la feuille 3, exercices 8 et 13, de la feuille 4, exercices 5, 7 et 10 de la feuille 5 (ce qui évidemment ne sera pas le cas le jour de l'examen !). Cela vous permet de disposer des corrigés, puisque les corrigés des feuilles sont disponibles sur e-campus. Pour l'exercice 8, un corrigé est disponible ci-dessous, en dernière page.

Rappel : le programme de l'examen est l'ensemble de tout ce qui a été vu ce semestre, même si bien sûr ce qui n'a pas été posé au partiel (chapitres 3, 4, 5, et sommes de Riemann dans le chapitre 2) sera probablement majoritaire.

Exercice 1.—

1. Après avoir justifié l'existence de primitives de $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $] -1, +\infty[$, déterminer une telle primitive (par exemple en intégrant par parties).

2. On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $u_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}}$, où l'on rappelle que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.

a) Établir l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right).$$

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 2.— Démontrer l'encadrement suivant :

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x \text{ pour tout } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Exercice 3.— En effectuant un développement limité en 0, à un ordre à déterminer, calculer l'équation de la tangente en 0 au graphe de chacune de la fonction suivante et

indiquer la position relative du graphe et de sa tangente :

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

Exercice 4.— Rechercher la (ou les) asymptote(s) de la fonction suivante et donner les positions relatives du graphe et de l'asymptote :

$$f(x) = \ln(\sqrt{e^x - e^{-x}}).$$

Exercice 5.— Trouver la solution $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} (1+t^2)y' - y = 0, \\ y(\sqrt{3}) = 1. \end{cases}$$

Exercice 6.— Soit l'équation $y'' + y' + 2y = (\cos(t) - \sin(t))e^{-t}$.

1. Rechercher une solution particulière sous la forme $y_0(t) = (a \cos(t) + b \sin(t))e^{-t}$.
2. Résoudre l'équation homogène associée.
3. En déduire toutes les solutions $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ de l'équation proposée.

Exercice 7.— Résoudre l'équation différentielle à variables séparées suivante :

$$x(y^2 - 1) - y(x^2 - 1)y' = 0.$$

Exercice 8.— *Cet exercice est plus difficile que les précédents, il est conseillé de ne l'aborder qu'après avoir complètement résolu les autres.* Soient u et v deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulle, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait

$$f''(x) + u(x)f'(x) + v(x)f(x) = 0.$$

On suppose que f s'annule en au moins deux points a et b , avec $a < b$. Démontrer que $f'(a) \neq 0$, et en utilisant une borne inférieure construire un réel $c \in]a, b]$ tel que :

- Ou bien pour tout $x \in]a, c[$ on a $f(x) > 0$,
- Ou bien pour tout $x \in]a, c[$ on a $f(x) < 0$.

Un corrigé de cet exercice est disponible page suivante.

Corrigé de l'exercice 8 : Tout d'abord montrons par l'absurde que $f'(a) \neq 0$. En effet si $f'(a) = 0$ alors f est une solution du problème de Cauchy formé par l'équation différentielle linéaire d'ordre 2

$$f''(x) + u(x)f'(x) + v(x)f(x) = 0$$

et les conditions initiales $f(a) = 0$ et $f'(a) = 0$. Or la fonction nulle est aussi solution sur $\mathbb{R}$ de ce problème de Cauchy. Par unicité, on en déduit que f est la fonction nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc $f'(a) \neq 0$; quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer $f'(a) > 0$. On va construire un réel $c \in]a, b]$ tel que pour tout $x \in]a, c[$ on ait $f(x) > 0$. Pour cela on commence par écrire le développement limité de f à l'ordre 1 en a :

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + o(x - a) = (x - a)(f'(a) + o(1)).$$

Comme $f'(a) \neq 0$, on a $f'(a) + o(1) \sim f'(a)$ d'où $f(x) \sim (x - a)f'(a)$ quand x tend vers a . Pour tout $x > a$ on a $(x - a)f'(a) > 0$ (puisque $f'(a) > 0$), donc pour tout $x > a$ suffisamment proche de a on a $f(x) > 0$. Il existe donc un réel $d > a$ tel que pour tout $x \in]a, d]$ on ait $f(x) > 0$.

Notons c la borne inférieure de l'ensemble des réels $y > a$ tels que $f(y) = 0$; cette borne inférieure existe car il s'agit d'une partie de $\mathbb{R}$ non vide (puisque elle contient b) et minorée (par a). Par définition de d , on a $c \geq d$ donc $c > a$. De plus pour tout $x \in]a, c[$ on a $f(x) \neq 0$ (sinon on aurait $c \leq x$ par définition de c) donc la fonction f ne s'annule pas sur l'intervalle $]a, c[$. Comme elle est continue, le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'elle est de signe constant (si elle prenait une valeur strictement positive et une valeur strictement négative, elle devrait s'annuler entre ces deux points, et ce n'est pas possible). Comme f est strictement positive entre a et d , on en déduit que $f(x) > 0$ pour tout $x \in]a, c[$.