

Module MDD151 : Calcul intégral

Corrigé du Partiel (durée : 2 heures)

Exercice 1.— Notons $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x + \ln x$ pour tout $x > 0$.

- (a) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans J , où J est un intervalle que l'on précisera.
- (b) On note $g = f^{-1}$ la bijection réciproque de f . Quel est le sens de variation de g ?
- (c) Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J , et pour tout $y \in J$ calculer $g'(y)$ en l'exprimant en fonction de $g(y)$.

Corrigé.

- (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x > 0$ on a $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et aussi continue sur cet intervalle. En outre on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $J = \mathbb{R}$.
- (b) Comme f est strictement croissante, sa bijection réciproque g aussi.
- (c) Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, sa bijection réciproque g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout $y \in J$ on a :

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{1 + \frac{1}{g(y)}} = \frac{g(y)}{g(y) + 1}.$$

Exercice 2.— Démontrer que pour tout $x \in [0, 1]$ on a

$$\arccos(1 - 2x^2) = 2 \arcsin(x).$$

Corrigé. Il y a (au moins) deux méthodes pour résoudre cet exercice.

La première consiste à dériver les fonctions f et g définies pour tout $x \in [0, 1]$ par $f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$ et $g(x) = 2 \arcsin(x)$. Comme $1 - 2x^2 \in]-1, 1[$ pour tout $x \in]0, 1[$, f est dérivable sur $]0, 1[$ et on a

$$f'(x) = -4x \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - (1 - 2x^2)^2}} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 4x^4}} = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} = g'(x)$$

pour tout $x \in]0, 1[$ (en factorisant $4x^2 - 4x^4$ sous la forme $4x^2(1 - x^2)$ puis en utilisant le fait que $\sqrt{4x^2} = 2x$ puisque $2x \geq 0$). Donc la fonction $f - g$ a une dérivée nulle sur l'intervalle $]0, 1[$: elle est constante. En outre $f - g$ est continue sur $[0, 1]$ car f et g le sont, donc $f - g$ est constante sur le segment $[0, 1]$. (La subtilité est que les fonctions arccos et arcsin sont continues sur $[-1, 1]$, mais dérivables seulement sur $] - 1, 1[$; donc f n'est, a priori du moins, dérivable que sur $]0, 1[$ et pas sur $[0, 1]$.) Comme on a $f(1) = \arccos(-1) = \pi = 2 \arcsin(1) = g(1)$, la fonction $f - g$ est identiquement nulle sur $[-1, 1]$, ce qui signifie que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

La second méthode consiste à fixer $x \in [0, 1]$ et à poser (pour plus de clarté) $\vartheta = \arcsin x$. On a alors

$$\cos(2\vartheta) = 1 - 2\sin^2(\vartheta) = 1 - 2x^2$$

puisque $\sin \vartheta = x$. En outre on a $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ puisque $x \in [0, 1]$, donc $0 \leq 2\vartheta \leq \pi$. Finalement $y = 2\vartheta$ est un élément de $[0, \pi]$ tel que $\cos y = 1 - 2x^2$: on a bien $\arccos(1 - 2x^2) = y = 2\vartheta = 2 \arcsin x$.

Exercice 3.— En intégrant deux fois par parties, déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto (\arcsin x)^2$ sur l'intervalle $] - 1, 1[$.

Corrigé. Une primitive est donnée par la fonction $F(x) = \int_0^x (\arcsin t)^2 dt$ pour $x \in] - 1, 1[$. En écrivant $(\arcsin t)^2 = 1 \cdot (\arcsin t)^2$, une première intégration par parties donne

$$F(x) = \left[t(\arcsin t)^2 \right]_0^x - \int_0^x t \cdot 2 \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} dt = x(\arcsin x)^2 + 2 \int_0^x \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t dt$$

puisque $t \mapsto t$ et $t \mapsto (\arcsin t)^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - 1, 1[$. On voit que la fonction $t \mapsto \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$ est la dérivée de $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ (qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - 1, 1[$) ce qui permet d'intégrer une seconde fois par parties. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} F(x) &= x(\arcsin x)^2 + 2 \left[(\arcsin t) \sqrt{1-t^2} \right]_0^x - 2 \int_0^x \sqrt{1-t^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= x(\arcsin x)^2 + 2(\arcsin x) \sqrt{1-x^2} - 2x. \end{aligned}$$

Exercice 4.— En utilisant le changement de variables $x = \ln(u)$, calculer

$$\int_0^{\ln 2} \frac{1}{3 + \exp(-x)} dx.$$

Corrigé. On pose $x = \ln(u)$, ce qui donne $dx = \frac{1}{u} du$. Quand x vaut 0 (respectivement $\ln 2$), on peut trouver la valeur correspondante de u en constatant que $u = \exp x$: on trouve $u = 1$ (respectivement $u = 2$). Comme $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$ correspond à $\frac{1}{u}$, on obtient :

$$\int_0^{\ln 2} \frac{1}{3 + \exp(-x)} dx = \int_1^2 \frac{1}{3 + \frac{1}{u}} \frac{1}{u} du = \int_1^2 \frac{du}{3u + 1} = \left[\frac{1}{3} \ln(3u + 1) \right]_1^2 = \frac{\ln 7 - 2 \ln 2}{3}.$$

Exercice 5.— Dans cet exercice on considère l'intégrale suivante :

$$J = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{1 + \cos x} dx.$$

- (a) Calculer J en utilisant le changement de variable $u = \cos x$.
- (b) Expliquer comment, à partir d'une règle vue en cours, on pouvait avoir l'idée de ce changement de variable.

Corrigé.

- (a) On pose $u = \cos x$ et on a $du = -\sin x dx$. Comme $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ on a :

$$\begin{aligned} J &= - \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} (-\sin x) dx = - \int_{\sqrt{3}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{1 - u^2}{1 + u} du = \int_{\sqrt{3}/2}^{\sqrt{2}/2} (u - 1) du \\ &= \left[\frac{u^2}{2} - u \right]_{\sqrt{3}/2}^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{4} - \sqrt{2}/2 - \frac{3}{8} + \sqrt{3}/2 = -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

en utilisant l'identité remarquable $1 - u^2 = (1 - u)(1 + u) = -(u - 1)(1 + u)$.

- (b) Appliquons la règle de Bioche. Quand on change x en $-x$, la fraction rationnelle $\frac{\sin^3 x}{1 + \cos x}$ est changée en son opposée (elle est impaire, car $\sin$ est impaire et $\cos$ est paire). Comme dx est aussi changé en son opposé, on obtient que $f(x)dx$ est invariant quand on change x en $-x$ ce qui suggère de poser $u = \cos x$.

Exercice 6.— Soit f une fonction continue sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On pose

$$\varphi(x) = \int_0^{\arctan x} f(t) dt.$$

Démontrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Corrigé. Comme f est continue sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, elle possède une primitive F , qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle. On a alors $\varphi(x) = F(\arctan x) - F(0)$. Comme $\arctan$ est à valeurs dans $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit par composition que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En outre pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} F'(\arctan x) = \frac{f(\arctan x)}{1+x^2}.$$

Exercice 7.— Développer en éléments simples la fraction rationnelle suivante, et en déduire une primitive (en précisant sur quels intervalles) :

$$f(x) = \frac{4x^2}{x^2 + 2x - 3}.$$

Corrigé. On commence par factoriser le dénominateur. C'est un polynôme de degré 2 dont le discriminant vaut $4+4\cdot 3 = 16$ donc ses racines sont $\frac{-2+\sqrt{16}}{2} = 1$ et $\frac{-2-\sqrt{16}}{2} = -3$. Comme il est unitaire (c'est-à-dire que le coefficient de x^2 vaut 1), on a la factorisation suivante : $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$. Le théorème de développement en éléments simples montre qu'il existe des réels a et b , et un polynôme $E(x)$, tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -3\}$ on ait

$$f(x) = E(x) + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}.$$

Le degré du polynôme E est 0, car le numérateur et le dénominateur de $f(x)$ sont de même degré ; donc E est une constante, qu'on peut trouver en faisant tendre x vers $+\infty$ dans la relation précédente. On obtient $E(x) = 4$.

Pour trouver le coefficient A on peut multiplier la relation précédente par $x - 1$ puis remplacer x par 1 ; on obtient que A est la valeur en $x = 1$ de $\frac{4x^2}{x+3}$, c'est-à-dire $A = 1$. Enfin, en multipliant la relation par $x + 3$ et en évaluant en $x = -3$ on obtient $B = \frac{4(-3)^2}{-3-1} = -9$. On a donc obtenu la décomposition de $f(x)$ en éléments simples :

$$f(x) = 4 + \frac{1}{x-1} - \frac{9}{x+3}.$$

Evidemment d'autres méthodes de calcul étaient possibles pour déterminer $E(x)$, A et B ; mais elles aboutissent toutes au même résultat. On obtient donc comme primitive de f la fonction F définie par

$$F(x) = 4x + \ln |x - 1| - 9 \ln |x + 3|,$$

à constante additive près, sur chacun des trois intervalles $] -\infty, -3[$, $] -3, 1[$, $] 1, +\infty[$.