

Module MDD151 : Calcul intégral

Entraînement pour le partiel

Ce qui suit ressemble à ce que vous pourriez avoir au partiel, qui dure 2h (+ tiers-temps). Ce sujet est probablement un peu trop long, et ce sera peut-être aussi le cas le jour du partiel. C'est pourquoi il est important de bien vous entraîner en amont, pour être efficaces le jour J.

Les questions sont piochées dans les feuilles de TD : exercices 2 et 15 de la feuille 1, et exercices 2, 8, 9, 10, 13, 17 et 20 de la feuille 2 (ce qui évidemment ne sera pas le cas le jour du partiel!). Cela vous permet de disposer des corrigés, puisque les corrigés des feuilles sont disponibles sur e-campus.

Rappel : le programme du partiel est l'ensemble des chapitres 1 et 2 (qui correspondent aux feuilles de TD 1 et 2), sauf la construction de l'intégrale de Riemann et les sommes de Riemann.

Exercice 1.— Soit $f : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x + x$.

1. Montrer que f définit une bijection entre $[-\pi/2, \pi/2]$ et un intervalle I que l'on précisera.
2. On note $g = f^{-1}$ la bijection réciproque de f . Quel est le sens de variation de g ?
3. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intérieur de I . Etudier ses dérivées à droite (ou à gauche) aux bornes de I .
4. Tracer le graphe de f et celui de g sur une même figure.

Exercice 2.— Simplifier l'expression suivante puis dessiner le graphe de la fonction :

$$f_1(x) = \arccos(\cos x) \text{ pour } x \in [0, 4\pi].$$

Exercice 3.— Calculer $\int_0^x \arctan u \, du$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.— 1. Trouver une primitive de $\phi(x) = x^2 \sin x$ en effectuant des intégrations par parties.

2. Grâce au changement de variables $u = \pi x^{1/3}$, en déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \sin(\pi x^{1/3}) dx.$$

Suite au verso.

Exercice 5.— Calculer

$$I_2 = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\sin 2x} dx$$

et

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3 + 2 \cos(x)} dx.$$

Exercice 6.— Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de la fonction φ_2 définie par :

$$\varphi_2(x) = \int_x^{\sin x} f(t) dt$$

et montrer que φ_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.— Développer en éléments simples la fraction rationnelle suivante, et en déduire une primitive (en précisant sur quels intervalles) :

$$f_2(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 3x + 2}.$$