

Module MDD151 : Calcul intégral

Partiel, durée : 2 heures

Les exercices qui suivent sont indépendants, et ne sont *pas* classés par ordre de difficulté. Les réponses et les calculs devront être justifiés de façon précise.

Les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices. Tout appareil électronique doit être éteint, notamment les téléphones portables.

Exercice 1.— Notons $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x + \ln x$ pour tout $x > 0$.

- (a) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans J , où J est un intervalle que l'on précisera.
- (b) On note $g = f^{-1}$ la bijection réciproque de f . Quel est le sens de variation de g ?
- (c) Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J , et pour tout $y \in J$ calculer $g'(y)$ en l'exprimant en fonction de $g(y)$.

Exercice 2.— Démontrer que pour tout $x \in [0, 1]$ on a

$$\arccos(1 - 2x^2) = 2 \arcsin(x).$$

Exercice 3.— En intégrant deux fois par parties, déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto (\arcsin x)^2$ sur l'intervalle $] -1, 1[$.

Exercice 4.— En utilisant le changement de variables $x = \ln(u)$, calculer

$$\int_0^{\ln 2} \frac{1}{3 + \exp(-x)} dx.$$

Exercice 5.— Dans cet exercice on considère l'intégrale suivante :

$$J = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{1 + \cos x} dx.$$

- (a) Calculer J en utilisant le changement de variable $u = \cos x$.
- (b) Expliquer comment, à partir d'une règle bien précise, on pouvait avoir l'idée de ce changement de variable.

Suite au verso.

Exercice 6.— Soit f une fonction continue sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On pose

$$\varphi(x) = \int_0^{\arctan x} f(t)dt.$$

Démontrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 7.— Développer en éléments simples la fraction rationnelle suivante, et en déduire une primitive (en précisant sur quels intervalles) :

$$f(x) = \frac{4x^2}{x^2 + 2x - 3}.$$