Séance de TD du 2 avril 2021

Programme du jour
Feuille 3 ex 8 - 9 - 6

Rappels sur les équivalents :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$a \in \mathbb{R}$, $a = \pm\infty$

① $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff f(x) = g(x) + o(g(x))$ quand $x \to a$
$= g(x) + o(f(x))$

② Si $\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\sim} f_1(x) \\ g(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x) \end{cases}$, alors : $f(x)g(x) \underset{x\to a}{\sim} f_1(x)g_1(x)$

$f(x)/g(x) \underset{x\to a}{\sim} f_1(x)/g_1(x)$.

③ Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $\forall a \in \mathbb{R}$ $f(x)^a \underset{x\to a}{\sim} g(x)^a$
(à la condition que $f(x)^a$, $g(x)^a$ sont correctement définis)

En particulier, si $a = \frac{1}{2}$:
$$\sqrt{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} \sqrt{g(x)}.$$

Ex 8

Q1: $g(x) = \dfrac{2x^3 - 5x}{e^x}$: $\bullet\ 2x^3 = o(x)$ quand $x \to 0$

$$\Rightarrow 2x^3 - 5x = -5x + o(x)$$

$$\underset{\text{prop } 1}{\Rightarrow} 2x^3 - 5x \underset{x \to 0}{\sim} -5x$$

- $e^x \xrightarrow[x \to 0]{} 1 \iff e^x \underset{x \to 0}{\sim} 1$

Conclusion : d'après la prop 2, $g(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{-5x}{1} = -5x$.

- $h(x) = \sqrt{2x^2 + 1 + \frac{1}{x}}$: $\overset{\xrightarrow[x\to 0]{} 0}{2x^2} + \underbrace{1}_{\to 1} + \overset{\to +\infty}{\frac{1}{x}}$ lorsque $x \to 0$, le terme dominant est $\frac{1}{x}$.

Plus précisément, quand $x \to 0$, $2x^2 = o\left(\frac{1}{x}\right)$ et $1 = o\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$\Rightarrow 2x^2 + 1 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 1 + \frac{1}{x} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{x}$$

D'après la prop 3, $h(x) \underset{x \to 0}{\sim} \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Q2 : • $f(x)$: en $+\infty$, le terme dominant est x^2, càd

$1 = o(x^2)$ et $x = o(x^2)$ quand $x \to +\infty$

$\Rightarrow -3x+1 = o(x^2)$ quand $x \to +\infty$

Ainsi, $f(x) = x^2 + o(x^2)$ quand $x \to +\infty$

donc $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$.

• $g(x)$: On a $2x^3 - 5x = 2x^3 + o(x^3)$ quand $x \to +\infty$

car $x = o(x^3)$ lorsque $x \to +\infty$

Ainsi $2x^3 - 5x \underset{x \to +\infty}{\sim} 2x^3$.

Donc, d'après la prop ②, $g(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{2x^3}{e^x} = 2x^3 e^{-x}$.

• $h(x)$: quand $x \to +\infty$, $1 = o(x^2)$ et $\frac{1}{x} = o(x^2)$

$$\Rightarrow 2x^2 + 1 + \frac{1}{x} = 2x^2 + o(x^2) \text{ quand } x \to +\infty.$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 1 + \frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\sim} 2x^2.$$

D'après la prop ③, on a $h(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}\, x$.

• $i(x)$: → On a $x^2 = o(e^x)$ quand $x \to +\infty$ (par croissance comparée)

donc $x^2 + e^x = e^x + o(e^x)$ quand $x \to +\infty$

$$\Rightarrow x^2 + e^x \underset{x \to +\infty}{\sim} e^x$$

→ On a $5 = o(x)$ quand $x \to +\infty$, donc $x + 5 \underset{x \to +\infty}{\sim} x$.

Ainsi, d'après la prop. ②, on obtient $i(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x}$.

Rq : $\frac{e^x}{x} = o(e^x)$ quand $x \to +\infty$, on n'a donc pas $i(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} e^x$.

$\boxed{\text{Ex } 9}$

- quand $x \to +\infty$, $\arctan(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$ car $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.

<u>si $a<0$</u> : $x^a \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $x^a = o(1)$ quand $x \to +\infty$

$\Rightarrow 1 + x^a = 1 + o(1)$

donc $1 + x^a \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$.

D'après la prop ②, on obtient que $\dfrac{\arctan(x)}{1+x^a} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$ <u>$(a<0)$</u>

<u>si $a=0$</u> : $1 + x^a = 1 + x^0 = 1 + 1 = 2$

$$\Rightarrow \frac{\arctan(x)}{1+x^a} = \frac{\arctan(x)}{2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4}.$$

Si $a>0$: $1+x^a \underset{x\to+\infty}{\sim} x^a$ car $x^a \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc $1 = o(x^a)$ quand $x\to+\infty$.

$$\Rightarrow \frac{\arctan(x)}{1+x^a} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x^a} = \frac{\pi}{2x^a}.$$

• $x^a\sin(x)$: Résultat : $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

donc $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

D'après la prop ②, on obtient :

$$x^a\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^a x \underset{x\to 0}{\sim} x^{a+1}.$$

On trouve une même expression ne dépendant que de a.

Théorème (formule de Taylor-Young)

Soit f $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et soit $a \in I$

Alors :

$$f(x) = f(a) + f'(a)\times(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\times(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)$$

lorsque $x \to a$.

Application à $\sin(x)$ en $x=0$:

$x \mapsto \sin(x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer Taylor-Young à l'ordre 1 en $a=0$:

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \underline{\sin(0)} + \sin'(0)(x-0) + o\left((x-0)\right) \\
&= 0 + \cos(0)\times x + o(x) \\
&= x + o(x)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x}$$

$$\frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^3} = \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^3}$$

Taylor-Young à l'ordre 3 en $a=0$ pour sin et cos.

$$= \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} - \cancel{x} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x^3} = \frac{x^3/3 + o(x^3)}{x^3} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{3}$$

Autre application de Taylor-Young : calculer des limites indéterminées

Exemple vu en cours

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2}$$

$$f^{(3)}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\text{qqchose qui ne dépend que de } f}{h^3}$$

On pourrait généraliser l'exc 6 de la façon suivante :

si f est $\mathcal{C}^n$, alors $f^{(n)}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\text{qqchose qui ne dépend que de } f}{h^n}$.

Ex 6

f $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

D'après Taylor-Young (à l'ordre 2) : $h \geq 0$ tq $x_0+h \in I$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \times \underbrace{(x_0+h-x_0)}_{=h} + \frac{f''(x_0)}{2}\underbrace{(x_0+h-x_0)}_{=h}^2 + o\left((x_0+h-x_0)^2\right)$$

$$= f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} h^2 + o(h^2).$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) + f'(x_0) \times (x_0-h-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x_0-h-x_0)^2 + o\left((x_0-h-x_0)^2\right)$$

$$= f(x_0) - h f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} h^2 + o(h^2).$$

On en déduit que :

$$f(x_0+h)+f(x_0-h) = \left(f(x_0)+\cancel{hf'(x_0)}+\frac{f''(x_0)}{2}h^2\right)+\left(f(x_0)-\cancel{hf'(x_0)}+\frac{f''(x_0)}{2}h^2\right)$$
$$+\,o(h^2)$$

$$= 2f(x_0)+\cancel{2}\times\frac{f''(x_0)}{\cancel{2}}h^2+o(h^2)$$

$$\Rightarrow f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0) = f''(x_0)h^2+o(h^2)$$

$$\Rightarrow f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0) \underset{h\to 0}{\sim} f''(x_0)h^2.$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} \underset{h\to 0}{\sim} f''(x_0).$$

D'où la limite attendue.

<u>Intérêt du résultat</u> : calculer $f''(x_0)$ sans passer par f' seulement à partir de f.

(il faut toutefois savoir a priori que f est $\mathcal{C}^2$)

Peut-on généraliser le résultat à $f^{(k)}$ si f $\mathcal{C}^k$?

La réponse est OUI.

Par exemple, si f est $\mathcal{C}^3$, on peut montrer avec Taylor-Young à l'ordre 3 que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+2h) - 3f(x_0+h) + 3f(x_0) - f(x_0-h)}{h^3} = f'''(x_0).$$

Pour k quelconque ($k \geqslant 1$), il y a une formule généralisée (en relation avec la formule du binôme de Newton)

À voir : Méthode des différences finies