

Séance de TD du 01/04/21

Programmation du jour : feuille n°3
ex 5-7-8

Exercice 5

$\forall x \in]-1; +\infty[$, $f(x) = \ln(1+x)$.

Q1: f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1; +\infty[$ car $u \mapsto \ln(u)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$.

On peut donc calculer $f^{(k)}$ pour tout $k \geq 1$.

Pour tout $x > -1$, on a:

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}; \quad f''(x) = ((1+x)^{-1})' = -1 \times (1+x)^{-1-1} \times 1 = -(1+x)^{-2}$$

$$f'''(x) = (-(1+x)^{-2})' = -(-2) \times (1+x)^{-3} = 2(1+x)^{-3}; \quad f^{(4)}(x) = (2(1+x)^{-3})' = -6(1+x)^{-4}$$

$$f^{(5)}(x) = (-6(1+x)^{-4})' = (-6) \times (-4) \times (1+x)^{-5} = 24(1+x)^{-5}$$

On devine que pour tout $k \geq 1$:

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \times (k-1)! \times (1+x)^{-k}$$

Montrons cette formule par récurrence.

initialisation ($k=1$): On a en que $f^{(1)}(x) = (1+x)^{-1}$
$$= \underbrace{(-1)^{1-1}}_{=1} \times \underbrace{(1-1)!}_{=0!=1} \times (1+x)^{-1}.$$

La formule est vraie pour $k=1$.

étape d'hérédité: On suppose la formule vraie pour un certain $k \geq 1$.

Montrons qu'elle est aussi vraie en $k+1$.

$\forall x > -1$:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}(x) \right)' \stackrel{\substack{\text{par hypothèse} \\ \text{de récurrence}}}{=} \left((-1)^{k-1} (k-1)! (1+x)^{-k} \right)' \\ &= (-1)^{k-1} (k-1)! (-k) (1+x)^{-k-1} \\ &= (-1)^k \underbrace{k \times (k-1)!}_{=k!} (1+x)^{-(k+1)} \\ &= (-1)^k k! (1+x)^{-(k+1)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ La formule est vraie à $k+1$, ce qui clôt la récurrence.

Q2: f est C^∞ sur $] -1; +\infty[$ donc on peut appliquer l'inégalité de Taylor pour tout $n \geq 0$, $a, b > -1$.

Rappel (inégalité de Taylor) Soit $f \in C^{n+1}$ sur $[a, b]$
On suppose que $\forall x \in [a, b]$, $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ où $M > 0$.
Alors ;

$$\left| f(b) - \underbrace{\left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right)}_{\text{polynôme de Taylor d'ordre } n \text{ en } a} \right| \leq \frac{M \times |b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ici, on applique l'inégalité à f pour $b=1$ (car $f(1) = \ln(1+1) = \ln(2)$)

Calculons le polynôme de Taylor d'ordre n en $a > -1$ de f .

Appelons-le P_n .

$$P_n(a) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \stackrel{Q1}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1} \cancel{(k-1)!} (1+a)^{-k}}{\cancel{k!}} (b-a)^k$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} (1+a)^{-k} (b-a)^k$$

$$\stackrel{(b=1)}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} (1+a)^{-k} (1-a)^k$$

$= 1$ si $a=0$

Lorsque $a=0$, on obtient $P_n(a) = U_n$ car $f(0) = h(1+0) = 0$
 donc le terme pour $k=0$
 de la somme n'existe pas (est nul).

Ainsi : pour $a=0$ et $b=1$, on obtient

$$|h(z) - U_n| \leq \frac{M \times |1-0|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M}{(n+1)!} \text{ où } M = \sup_{x \in [0,1]} |f^{(n+1)}(x)|$$

$$\begin{aligned} \text{On : } |f^{(n+1)}(x)| &= |(-1)^n n! (1+x)^{-(n+1)}| \\ &= \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \leq \frac{n!}{1} \text{ quand } x \geq 0 \\ &\leq n! \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |f^{(n+1)}(x)| \leq n!$$

$$\text{Prendons donc } M=n!. \text{ On obtient : } |h(z) - U_n| \leq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{On conclut que } |h(z) - U_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow U_n \rightarrow h(z) \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Question : comment utiliser ce résultat pour trouver une approximation à 10^{-3} près de $\ln(2)$?

Prends $n = 1000 = 10^3$. Alors $|\ln(2) - U_{1000}| \leq \frac{1}{1000+1} < 10^{-3}$
 $\Rightarrow \ln(2) = U_{1000}$ à 10^{-3} près.

Rapports (pour ex 7, 8 et 9)

$$\textcircled{1} \quad \left. \begin{array}{l} f(x) = o(g(x)) \text{ quand } x \rightarrow a \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \in \mathbb{R} \\ \text{ou } a = \pm\infty. \end{array}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} a \in \mathbb{R} \\ \text{ou } a = \pm\infty. \end{array} \right.$$

Exercice 7

	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow +\infty$
a) $x^2 = o(x^3)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \pm\infty \neq 0$ FAUX	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ VRAI
b) $x^3 = o(x^2)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ VRAI	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \neq 0$ FAUX
c) $x = o(1)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ VRAI	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1} = +\infty$ FAUX
d) $1 = o(x)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \pm\infty \neq 0$ FAUX	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ VRAI

	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow +\infty$
(e) $x^2 = o(x^2)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \neq 0$ FAUX	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$ FAUX
(f) $x^2 = o(e^x)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2)_{x \rightarrow 0 \rightarrow 0}}{(e^x)_{x \rightarrow 0 \rightarrow 1}} = 0$ <u>VRAI</u>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ par croissance comparée « l'exponentielle l'emporte sur les polynômes en $+\infty$ » <u>VRAI</u>
(g) $e^x = o(x^2)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x_{x \rightarrow 1}}{x^2_{x \rightarrow 0}} = +\infty$ FAUX	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ par croissance comparée. FAUX
(h) $x^2 = o(\ln(x))$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2_{x \rightarrow 0} \rightarrow 0}{\ln(x)_{x > 0} \rightarrow -\infty} = 0$ VRAI	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln(x)} = +\infty$ par croissance comparée FAUX
(i) $\ln(x) = o(x^2)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty$ FAUX	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ par croissance comparée « les polynômes l'emportent sur le logarithme en $+\infty$ » <u>VRAI</u>

Exercice 8

Chercher un équivalent d'une fonction $f(x)$ quand $x \rightarrow a$.

= trouver une fonction $g(x)$ plus simple que la pas
telle que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. "simplifiable"

Q1: Un cas qui est simple, c'est quand $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \in \mathbb{R}^*$

Dans ce cas, $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} l$.

Ici, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 3x + 1) = 1$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1}$$

et aussi $\lim_{x \rightarrow 0} i(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + e^x}{x + 5} \underset{\rightarrow 5}{=} \frac{1}{5}$

$$\Rightarrow \boxed{i(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{5}}$$

Def (cons) (1) $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x) \iff f(x) = g(x) + o(g(x))$
 $\text{quand } x \rightarrow a.$

(2) Si $f(x) \sim_{x \rightarrow a} f_1(x)$, also $\frac{f(x)}{g(x)} \sim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$
 $g(x) \sim_{x \rightarrow a} g_1(x)$